Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 5
Γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από ένα σύνολο
Άθροισμα δύο υποχώρων

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

26/2/2014

Γραμμικοί συνδυασμοί.

Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $u_1, \dots, u_k \in V$ είναι ένα άθροισμα της μορφής

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_k u_k \,,$$

όπου οι *συντελεστές* $a_1, a_2, \dots, a_k$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$ πάνω από το οποίο ορίζεται ο V.

Ο ορισμός του γραμμικού υπόχωρου εξασφαλίζει οτι εάν τα $u_1, \dots, u_k$ ανήκουν στο γραμμικό υπόχωρο X, τότε ο γραμμικός συνδυασμός $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_k u_k$ επίσης ανήκει στον X.

Παραδείγματα γραμμικών συνδυασμών.

Παράδειγμα Κάθε διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\,.$$

Παράδειγμα Κάθε πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{K}[x]$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n+1$ μονωνύμων $p_0(x) = x^0$, $p_1(x) = x^1$, $\ldots$, $p_n(x) = x^n$,

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n.$$

Χώρος που παράγεται από ένα σύνολο.

Θεωρούμε ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ του διανυσματικού χώρου V, και το σύνολο Y όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Θα δείξουμε οτι Y είναι γραμμικός υπόχωρος.

Εάν $x = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ και $y = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$, για $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, τότε $x + y$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_k + b_k)v_k \,.$$

Εάν $c \in \mathbb{K}$, cx επίσης εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$cx = ca_1 v_1 + \cdots + ca_k v_k \,.$$

Χώρος που παράγεται από ένα σύνολο (2).

Άρα Y είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, και συνεπώς είναι υπόχωρος του V.

Λέμε οτι Y είναι **ο υπόχωρος που παράγεται** από το σύνολο S.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$, το συμβολίζουμε $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Χώρος στηλών και χώρος γραμμών ενός πίνακα.

Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα A, και συμβολίζουμε

$$u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$$

τις στήλες του A και

$$r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}^n$$

τις γραμμές του A.
Ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από τις στήλες του A είναι ο **χώρος στηλών** του A. Έχουμε δει οτι αυτός είναι ίσος με το γραμμικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$.
Ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από τις γραμμές του A είναι ο **χώρος γραμμών** του A.

Ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος που περιέχει ένα υποσύνολο.

Εάν X είναι οποιοσδήποτε γραμμικός υπόχωρος του V και $S \subset X$, τότε ο γραμμικός υπόχωρος Y που παράγεται από το S είναι υπόχωρος του X.

Ο γραμμικός υπόχωρος Y που παράγεται από το S είναι ίσος με την τομή όλων των γραμμικών υποχώρων του V που περιέχουν το σύνολο S.

Παράδειγμα.

Παράδειγμα Ο γραμμικός υπόχωρος $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, -2)$.

Πράγματι, κάθε στοιχείο του U είναι πολλαπλάσιο του $(1, -2)$.

Παράδειγμα: η τομή δύο υπόχωρων

Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του $\mathbb{R}^3$, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$, όπου $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 1)$, $y_1 = (1, -1, 1)$ και $y_2 = (1, 0, 3)$.

Για να βρούμε τον υπόχωρο $X \cap Y$, προσδιορίζουμε τα b_1, b_2 τα οποία αποτελούν μέρος μίας λύσης του συστήματος

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Παράδειγμα: η τομή δύο υπόχωρων (2)

Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss και βρίσκουμε $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$.
Δηλαδή ο υπόχωρος $X \cap Y$ αποτελείται από διανύσματα της μορφής

$$b(-\frac{4}{3}y_1 + y_2) \;\; \text{για} \;\; b \in \mathbb{R}\,.$$

Με άλλα λόγια, παράγεται από το διάνυσμα
$-4(1, -1, 1) + 3(1, 0, 3) = (-1, 4, 5)$,

$$X \cap Y = \langle (-1, 4, 5) \rangle\ .$$

Άθροισμα γραμμικών υποχώρων

Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του V που είναι γραμμικός υπόχωρος, και θα δείξουμε οτι είναι ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το $X \cup Y$.

Ορισμός. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, το σύνολο των διανυσμάτων που γράφονται ως άθροισμα ενός διανύσματος του X και ενός διανύσματος του Y,

$$X + Y = \{v \in V \,|\, \text{υπάρχουν } x \in X \text{ και } y \in Y \text{ τέτοια ώστε } v = x + y\}$$

ονομάζεται **άθροισμα** των X και Y.

Το άθροισμα των γραμμικών υποχώρων $X + Y$ είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V που περιέχει την ένωση $X \cup Y$

Άθροισμα γραμμικών υποχώρων (2)

Λήμμα

Το άθροισμα των γραμμικών υποχώρων $X+Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και παράγεται από την ένωση $X \cup Y$,

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle .$$

Απόδειξη.

Γιά κάθε $x \in X$ και $y \in Y$, $x + y \in \langle X \cup Y \rangle$, άρα $X + Y \subseteq \langle X \cup Y \rangle$. $X + Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, άρα είναι γραμμικός υπόχωρος και περιέχει το $\langle X \cup Y \rangle$. $\square$

Άθροισμα γραμμικών υποχώρων (3)

Παράδειγμα Στο σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζουμε μία συνάρτηση **άρτια** εάν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και **περιττή** εάν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Τα σύνολα C^0_+ των άρτιων συναρτήσεων και C^0_-των περιττών συναρτήσεων είναι γραμμικοί υπόχωροι του $C^0(\mathbb{R})$ και

$$C^0(\mathbb{R}) = C^0_+ + C^0_- \,.$$

Ευθύ άθροισμα γραμμικών υποχώρων.

Γενικά υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί ένα διάνυσμα $x \in X + Y$ ως άθροισμα στοιχείων των X και Y.

Εάν όμως $X \cap Y = \{0\}$, τότε κάθε στοιχείο του $X + Y$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του X και του Y.

Ορισμός. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικούς υπόχωρους X, Y. Εάν $X \cap Y = \{0\}$, τότε το άθροισμα $X + Y$ ονομάζεται (**εσωτερικό**) **ευθύ άθροισμα**, και συμβολίζεται $X \oplus Y$.