Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 2

Διανυσματικοί Χώροι

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

21/2/2014

Τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου

Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$. Ένα σύνολο V, με δύο πράξεις

$$\alpha : V \times V \to V \qquad \alpha(v, w) = v \dot{+} w$$

και

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v$$

ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

Τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου (2)

Τα αξιώματα της πρόσθεσης

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V, \quad v \dot{+} w = w \dot{+} v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V, \quad (v \dot{+} w) \dot{+} u = v \dot{+} (w \dot{+} u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V, \quad v \dot{+} \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dot{+} w = 0$.

Τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου (3)

Τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V$, $\quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

Τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου (4)

Οι επιμεριστικές ιδιότητες

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v, w \in V$, $\quad a \cdot (v \dotplus w) = a \cdot v \dotplus a \cdot w.$

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V$, $\quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dotplus b \cdot v.$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Στοιχειώδη συμπεράσματα από τα αξιώματα

Λήμμα

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*
   Πιο αναλυτικά,
   1. *για κάθε $v \in V$, $\quad 0 \cdot v = \bar{0}$,*
   2. *για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $\quad a \cdot \bar{0} = \bar{0}$,*
   3. *για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.*
2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη.

Πρώτα θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dot{+} w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

□

Απόδειξη.

Τώρα θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dot{+} \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} \dot{+} u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dot{+} u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0}) \dot{+} u \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} (a \cdot \bar{0} \dot{+} u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

□

Απόδειξη.

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v \\ &= (a^{-1}a) \cdot v \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot v) \\ &= a^{-1} \cdot \bar{0} \\ &= \bar{0}\,. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη.

Για να δείξουμε οτι το αντίθετο ενός διανύσματος είναι μοναδικό, υποθέτουμε οτι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε οτι $w = w'$. Έχουμε οτι $v \dotplus w = \bar{0} = v \dotplus w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dotplus \bar{0} \\ &= w \dotplus (v \dotplus w') \\ &= (w \dotplus v) \dotplus w' \\ &= (v \dotplus w) \dotplus w' \\ &= \bar{0} \dotplus w' \\ &= w' \dotplus \bar{0} \\ &= w' \end{aligned}$$

□

Απόδειξη.

Τέλος δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1)\cdot v$ είναι αντίθετο του v.

$$\begin{aligned} v \dot{+} ((-1)\cdot v) &= (1\cdot v) \dot{+} ((-1)\cdot v) \\ &= (1+(-1))\cdot v \\ &= 0\cdot v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$. □