Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 6
Γραμμική εξάρτηση – Γραμμική ανεξαρτησία

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

28/2/2014

Γραμμική εξάρτηση

Περιττά στοιχεία στη Γραμμική Άλγεβρα:

- Ένα διάνυσμα του οποίου η προσθήκη δεν παράγει ένα μεγαλύτερο υπόχωρο.
- Μία εξίσωση η οποία δεν θέτει κανένα επί πλέον περιορισμό.

Ορισμός. Η *πεπερασμένη* συλλογή διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_n$ για $n \geq 2$, είναι **γραμμικά εξαρτημένη** εάν κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Δηλαδή υπάρχει κάποιο j, $1 \leq j \leq n$, και αριθμοί $a_i \in \mathbb{K}$ για κάθε i, με $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, τέτοιοι ώστε

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n \,.$$

Γραμμική εξάρτηση (2)

Παράδειγμα Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1, 0)$, $(0, 1)$ και (a, b) είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$(a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)\,.$$

Παράδειγμα Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1 - x)$ και $r(x) = 1 - x^2$, είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$r(x) = p(x) + q(x)\,.$$

Γραμμική εξάρτηση (3)

Λήμμα

Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots v_n$, $n \geq 2$, είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν και μόνον εάν το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0.

Απόδειξη.

Εάν $v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n$ τότε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} - v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Αντίστροφα, εάν $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ και $a_1 \neq 0$ τότε

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n\,.$$

$\square$

Γραμμική εξάρτηση (4)

Γενικεύουμε την έννοια της γραμμικής εξάρτησης σε άλλες συλλογές διανυσμάτων.

Η κενή συλλογή διανυσμάτων, δηλαδή η συλλογή που δεν περιέχει κανένα διάνυσμα, δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη.
Η συλλογή που περιέχει μόνον ένα διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένη μόνον εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα.
Μια άπειρη συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν περιέχει κάποια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων η οποία είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα διατυπώνουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο την έννοια υπό την οποία ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει περιττά στοιχεία.

Λήμμα (Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης)

Θεωρούμε τη γραμμικά εξαρτημένη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$. *Εάν υπάρχει μία σχέση* $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ *στην οποία ο συντελεστής του* v_j *δεν είναι ίσος με* 0, *τότε ο υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο*

$$\{v_1, \ldots, v_n\}$$

είναι ίσος με τον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}.$$

Γραμμική ανεξαρτησία

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι **γραμμικά ανεξάρτητη** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Για μία πεπερασμένη συλλογή $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 2$, αυτό σημαίνει οτι κανένα στοιχείο της συλλογής δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Λήμμα

Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν και μόνον εάν ο μοναδικός τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.

Γραμμική ανεξαρτησία (2)

Πρόταση

Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε κάθε συλλογή που την περιέχει είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένη.

Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε κάθε συλλογή που περιέχεται σε αυτήν είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητη.

Γραμμική ανεξαρτησία (3)

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι το μηδενικό διάνυσμα εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου. Θα δούμε οτι το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο διάνυσμα που βρίσκεται στο χώρο που παράγει το σύνολο.

Πρόταση

Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ εκφράζεται κατά ένα και μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.

Γραμμική ανεξαρτησία (4)

Λήμμα

Εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο και* $v_1 \neq 0$, *τότε υπάρχει* k, *με* $1 \leq k < n$, *τέτοιο ώστε το σύνολο* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και υπάρχουν αριθμοί* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ *τέτοιοι ώστε* $v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$.