



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 1

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

1^η σειρά ασκήσεων

1. Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$.

(a) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$$

είναι πραγματικός.

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{\rho^2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{\rho^2}$$

(b) Να αποδειχθεί ότι

$$\rho|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$$

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \rho^3 \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} \right| = \rho |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3|$$

2. Δίδεται η εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Να αποδειχθεί ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0,$$

όπου z_1 και z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 2^{1004}(z_1^2 + z_2^2) = 2^{1005} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)$$

(b) Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των w για τα οποία

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|.$$

$$|w - 4 + 3i| = 2.$$

(c) Να αποδειχθεί ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

$$2 = |w - 4 + 3i| \geq ||w| - |4 - 3i|| = ||w| - 5|$$

3. Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x + iy$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, με $y \neq 0$. Δίδεται επίσης ότι $z_2 - z_1$ είναι πραγματικός αριθμός.

$$\frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1} - z_1 = \frac{2 - z_1}{2 + z_1} - \bar{z}_1 \Leftrightarrow \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1} - \frac{2 - z_1}{2 + z_1} = z_1 - \bar{z}_1 \Leftrightarrow 4 \frac{z_1 - \bar{z}_1}{(2 + \bar{z}_1)(2 + z_1)} = z_1 - \bar{z}_1$$

$$(2 + \bar{z}_1)(2 + z_1) = 4$$

(a) Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

$$z_2 - z_1 = \frac{(2 - \bar{z}_1)(2 + z_1)}{4} - z_1 = \frac{4 - 2\bar{z}_1 - 2z_1 - |z_1|^2}{4} = \frac{(2 + \bar{z}_1)(2 + z_1) - 2\bar{z}_1 - 2z_1 - |z_1|^2}{4}$$

(b) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

$$|z_1 + 2| = 2, z_1 \neq 0$$

(c) Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $xy > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να αποδειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

$$x^2 = y^2, xy > 0, x^2 + y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = y = -2 \Leftrightarrow z_1 = -2(1 + i)$$

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = (1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$$

4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$. Να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος αυτών των αριθμών ισούται με 2.

$$\left(\frac{4 - z}{z}\right)^{10} = 1 \Rightarrow \left|\frac{4 - z}{z}\right| = 1 \Rightarrow 4 - 2\Re(z) + |z|^2 = |z|^2$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 1**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>