



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

# **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**

**2η σειρά ασκήσεων**

**Γιώργος Τζιρίτας**

**Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς**  
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

**2<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων**

1. Να παρασταθεί γραφικά η καρδιοειδής καμπύλη

$$z(t) = (1 + \cos t)(\sin t - i \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Το μήκος μιας καμπύλης δίδεται από τη σχέση

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt$$

με δοσμένη μια παραμετρική περιγραφή της  $z(t)$ . Να βρεθεί η περίμετρος της ανωτέρω καρδιοειδούς καμπύλης.

2. Θεωρήστε την ακολουθία

$$z_n = z_{n-1}^2 + c, \quad n \geq 1, \quad z_0 = 0,$$

όπου  $c$  είναι μιγαδικός αριθμός. Για κάποιες τιμές του  $c$  η ακολουθία τείνει στο άπειρο, δηλαδή το μέτρο  $|z_n|$  μεγαλώνει αδιάκοπα. Το σύνολο των αριθμών για τους οποίους η ακολουθία δεν τείνει στο άπειρο ονομάζεται Mandelbrot set. Έχει ευρεθεί ότι αν για κάποιο  $z_n$  το μέτρο του ξεπεράσει το 2, τότε με βεβαιότητα η ακολουθία τείνει στο άπειρο. Ζητείται αξιοποιώντας αυτή την ιδιότητα να ευρεθεί και απεικονισθεί το Mandelbrot set με χρήση του MATLAB. Προς τούτο θεωρήστε ένα πλέγμα  $401 \times 401$  σημείων στο μιγαδικό επίπεδο ως τιμές του  $c$  στο διάστημα  $-2 \leq \Re c \leq 2, -2 \leq \Im c \leq 2$ . Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το πλέγμα η συνάρτηση meshgrid. Ορίστε ως μέγιστη τιμή για τις επαναλήψεις της αναδρομικής σχέσης το 50. Για κάθε τιμή του  $c$  βρείτε τον αριθμό  $M$  των επαναλήψεων ώστε  $|z_n| > 2$ . Αν η ανισότητα δε συμβαίνει μέχρι το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, τότε  $M = 50$ . Έτσι λαμβάνεται ένας πίνακας διάστασης  $401 \times 401$  του οποίου ζητείται η απεικόνιση με χρήση της συνάρτησης image του MATLAB.

3. (a) Να αποδειχθεί ότι για  $|z| = 1$  και  $\alpha$  πραγματικό αριθμό με  $|\alpha| \neq 1$ ,

$$\frac{|\alpha z - 1|}{|z - \alpha|} = 1.$$

- (b) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

και ζητείται να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή είναι επίσης κύκλος με κέντρο το σημείο  $(\frac{1}{1-\alpha^2}, 0)$ . Ποιά είναι η ακτίνα αυτού του κύκλου;

4. Με χρήση συμβολικών υπολογισμών στο MATLAB (συνάρτηση int) να βρεθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα

(a)

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$$

(b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$$

(c)

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}, \quad \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}$$

(d)

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)}, \quad \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)}$$

(e)

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 2i}, \quad \oint_{|z-1|=3} \frac{dz}{z^2 - 2i}$$

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

## •Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. 2η σειρά ασκήσεων**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>