



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 2

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

2<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων

Απαντήσεις

1. Να παρασταθεί γραφικά η καρδιοειδής καμπύλη

$$z(t) = (1 + \cos t)(\sin t - i \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Το μήκος μιας καμπύλης δίδεται από τη σχέση

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt$$

με δοσμένη μια παραμετρική περιγραφή της  $z(t)$ . Να βρεθεί η περίμετρος της ανωτέρω καρδιοειδούς καμπύλης.

**Απάντηση**

$$z(t) = (1 + \cos t)(\sin t - i \cos t) = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - i(\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t - 1)$$

Επομένως

$$z'(t) = \cos t + \cos 2t + i(\sin t + \sin 2t),$$

$$|z'(t)|^2 = \cos^2 t + \cos^2 2t + 2 \cos t \cos 2t + \sin^2 t + \sin^2 2t + 2 \sin t \sin 2t = 2(1 + \cos t).$$

Άρα

$$|z'(t)| = 2 \left| \cos \frac{t}{2} \right|.$$

Η περίμετρος της καμπύλης θα είναι

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 4 \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \sin t = 8.$$

2. Δείτε το

<https://www.mathworks.com/moler/exm/chapters/mandelbrot.pdf>

3. (a) Να αποδειχθεί ότι για  $|z| = 1$  και  $\alpha$  πραγματικό αριθμό με  $|\alpha| \neq 1$ ,

$$\frac{|\alpha z - 1|}{|z - \alpha|} = 1.$$

**Απάντηση**

$$\frac{|\alpha z - 1|^2}{|z - \alpha|^2} = \frac{(\alpha z - 1)(\alpha \bar{z} - 1)}{(z - \alpha)(\bar{z} - \alpha)} = \frac{\alpha^2 |z|^2 + 1 - 2\alpha(z + \bar{z})}{|z|^2 + \alpha^2 - 2\alpha(z + \bar{z})} = \frac{\alpha^2 + 1 - 2\alpha(z + \bar{z})}{1 + \alpha^2 - 2\alpha(z + \bar{z})}$$

(b) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

και ζητείται να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή είναι επίσης κύκλος με κέντρο το σημείο  $(\frac{1}{1-\alpha^2}, 0)$ . Ποιά είναι η ακτίνα αυτού του κύκλου;

**Απάντηση**

$$\left| \frac{z}{z - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha^2} \right| = \left| \frac{z(1 - \alpha^2) - (z - \alpha)}{(1 - \alpha^2)(z - \alpha)} \right| = \left| \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right| \left| \frac{\alpha z - 1}{z - \alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right|.$$

4. Με χρήση συμβολικών υπολογισμών στο MATLAB (συνάρτηση int) να βρεθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα

**Απαντήσεις**

(a)

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i$$

(b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz = -\frac{\pi i}{3}$$

(c)

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3} = \frac{\pi i}{2}, \quad \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3} = 0$$

(d)

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)} = 0, \quad \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)} = 0$$

(e)

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 2i} = \frac{\pi}{2}(1 + i), \quad \oint_{|z-1|=3} \frac{dz}{z^2 - 2i} = 0.$$

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

## •Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 2**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>