ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 6

Γιώργος Τζιρίτας
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

6^{η} σειρά ασκήσεων

Απαντήσεις

1. Να ευρεθεί η περιοδική συνέλιξη των ακολούθων περιοδικών σημάτων, με περίοδο T

$$x(t) = \cos\frac{2\pi t}{T} + 2\sin\frac{4\pi t}{T} \quad \text{και}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{4} \\ 0 & |t| > \frac{T}{4} \end{cases}$$

Απάντηση

Οι συντελεστές του αναπτύγματος για το $x(t)$ είναι:

$$c_1(1) = c_1(-1) = \frac{1}{2}, c_1(2) = -i, c_1(-2) = i.$$

Οι συντελεστές του αναπτύγματος για το $h(t)$ είναι:

$$c_2(n) = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}.$$

Οι συντελεστές της περιοδικής συνέλιξης θα είναι το γινόμενο των δύο ανωτέρω, δηλαδή, $c(n) = c_1(n)c_2(n)$, οπότε μένουν μόνο:

$$c(1) = c(-1) = \frac{1}{2\pi}.$$

Η περιοδική συνέλιξη θα είναι:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

2. Για ένα πραγματικό και άρτιο περιοδικό σήμα, $f(t)$, με θεμελιώδη περίοδο T, δίδεται ότι:

- $a(n) = 0, n > 1$,
- η μέση τιμή είναι

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 1$$

και

- η μέση ισχύς είναι

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = 2.$$

Να ευρεθούν δύο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.
Απάντηση

$$c(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 1.$$

$$c^2(0) + c^2(1) + c^2(-1) = 2 \;\; \text{και} \;\; c(1) = c(-1).$$

Άρα : $c(1) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οπότε τα δύο δυνατά σήματα είναι :

$$f(t) = 1 \pm \sqrt{2} cos\frac{2\pi t}{T}.$$

3. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των ακολούθων σημάτων

(a) $x_1(t) = \begin{cases} 1 & -T \le t < 0 \\ -1 & 0 \le t \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

Απάντηση

$$x_1(t) = u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)$$

$$X_1(\omega) = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega T} - 2 + e^{-i\omega T}\right) = \frac{2}{i\omega}(\cos\omega T - 1) = i\frac{4\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\omega}$$

(b) $x_2(t) = e^{-3|t|}\sin 2t$

Απάντηση

$$x_2(t) = e^{-3|t|}\sin 2t = \frac{i}{2}e^{-3|t|}\left(e^{-i2t} - e^{i2t}\right)$$

$$X_2(\omega) = \frac{3i}{9+(\omega+2)^2} - \frac{3i}{9+(\omega-2)^2}$$

(c) $x_3(t) = \begin{cases} -1 & t < -T \\ \frac{t}{T} & |t| \le T \\ 1 & t > T \end{cases}$

Απάντηση

- Πρώτος τρόπος

  Το $x_3(t)$ προκύπτει ως η συνέλιξη του σήματος προσήμου, $x(t)$, με τον τετραγωνικό παλμό

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

  Πράγματι

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \begin{cases} -1, & t < -T \\ 1, & t > T \end{cases}$$

  Ενώ για $|t| \le T$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = -\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{0} d\tau + \frac{1}{2T}\int_{0}^{t+T} d\tau = \frac{t}{T}.$$

  Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του $x_3(t)$ θα είναι το γινόμενο των δύο μετασχηματισμών

$$X_3(\omega) = \frac{2}{i\omega}\text{sinc}\omega T$$

- Δεύτερος τρόπος

$$x_3(t) = u(t-T) - u(-t-T) + f(t), \quad \text{όπου}$$
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Για το $f(t)$ ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$F(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} te^{-i\omega t}dt = -\frac{2\cos\omega T}{i\omega} + \frac{2\sin\omega T}{i\omega^2 T}$$

Οπότε

$$X_3(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-i\omega T} - \left(-\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(-\omega)\right)e^{+i\omega T} - \frac{2\cos\omega T}{i\omega} + \frac{2\sin\omega T}{i\omega^2 T}$$

Κι επομένως

$$X_3(\omega) = \frac{2}{i\omega}\mathrm{sinc}\omega T$$

4. Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των ακολούθων

(a) $X_1(\omega) = \frac{4e^{-i\omega}}{4+\omega^2}$

Απάντηση

$$x_1(t) = e^{-2|t-1|}$$

(b) $X_2(\omega) = \cos^2(4\omega - \frac{\pi}{7})$

Απάντηση

$$X_2(\omega) = \frac{1+\cos(8\omega - \frac{2\pi}{7})}{2}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2\pi i}{7}}\delta(t+8) + e^{\frac{2\pi i}{7}}\delta(t-8)\right)$$

(c) $X_3(\omega) = \begin{cases} 1 & -W \leq \omega < 0 \\ -1 & 0 \leq \omega \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

Απάντηση

$$x_3(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{0} e^{i\omega t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{W} e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2i\pi t}\left(1 - e^{-iWt}\right) - \frac{1}{2i\pi t}\left(e^{iWt} - 1\right)$$

Κι επομένως

$$x_3(t) = \frac{2 - e^{-iWt} - e^{iWt}}{2i\pi t} = \frac{1-\cos Wt}{i\pi t} = \frac{2\sin^2\frac{Wt}{2}}{i\pi t}$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς