



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 6

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

6^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

1. Να ευρεθεί η περιοδική συνέλιξη των ακολούθων περιοδικών σημάτων, με περίοδο T

$$x(t) = \cos \frac{2\pi t}{T} + 2 \sin \frac{4\pi t}{T} \text{ και}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{4} \\ 0 & |t| > \frac{T}{4} \end{cases}$$

Απάντηση

Οι συντελεστές του αναπτύγματος για το $x(t)$ είναι:

$$c_1(1) = c_1(-1) = \frac{1}{2}, c_1(2) = -i, c_1(-2) = i.$$

Οι συντελεστές του αναπτύγματος για το $h(t)$ είναι:

$$c_2(n) = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi}.$$

Οι συντελεστές της περιοδικής συνέλιξης θα είναι το γινόμενο των δύο ανωτέρω, δηλαδή, $c(n) = c_1(n)c_2(n)$, οπότε μένουν μόνο:

$$c(1) = c(-1) = \frac{1}{2\pi}.$$

Η περιοδική συνέλιξη θα είναι:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

2. Για ένα πραγματικό και άρτιο περιοδικό σήμα, $f(t)$, με θεμελιώδη περίοδο T , δίδεται ότι:

- $a(n) = 0, n > 1$,
- η μέση τιμή είναι

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 1$$

και

- η μέση ισχύς είναι

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = 2.$$

Να ευρεθούν δύο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

Απάντηση

$$c(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 1.$$

$$c^2(0) + c^2(1) + c^2(-1) = 2 \text{ και } c(1) = c(-1).$$

Άρα : $c(1) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Οπότε τα δύο δυνατά σήματα είναι :

$$f(t) = 1 \pm \sqrt{2} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

3. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των ακόλουθων σημάτων

$$(a) x_1(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t < 0 \\ -1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Απάντηση

$$x_1(t) = u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)$$

$$X_1(\omega) = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega T} - 2 + e^{-i\omega T}) = \frac{2}{i\omega} (\cos \omega T - 1) = i \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega}$$

$$(b) x_2(t) = e^{-3|t|} \sin 2t$$

Απάντηση

$$x_2(t) = e^{-3|t|} \sin 2t = \frac{i}{2} e^{-3|t|} (e^{-i2t} - e^{i2t})$$

$$X_2(\omega) = \frac{3i}{9 + (\omega + 2)^2} - \frac{3i}{9 + (\omega - 2)^2}$$

$$(c) x_3(t) = \begin{cases} -1 & t < -T \\ \frac{t}{T} & |t| \leq T \\ 1 & t > T \end{cases}$$

Απάντηση

- Πρώτος τρόπος

Το $x_3(t)$ προκύπτει ως η συνέλιξη του σήματος προσήμου, $x(t)$, με τον τετραγωνικό παλμό

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Πράγματι

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \begin{cases} -1, & t < -T \\ 1, & t > T \end{cases}$$

Ενώ για $|t| \leq T$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = -\frac{1}{2T} \int_{t-T}^0 d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^{t+T} d\tau = \frac{t}{T}.$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του $x_3(t)$ θα είναι το γινόμενο των δύο μετασχηματισμών

$$X_3(\omega) = \frac{2}{i\omega} \text{sinc} \omega T$$

- Δεύτερος τρόπος

$$x_3(t) = u(t - T) - u(-t - T) + f(t), \quad \text{όπου}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Για το $f(t)$ ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$F(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T t e^{-i\omega t} dt = -\frac{2 \cos \omega T}{i\omega} + \frac{2 \sin \omega T}{i\omega^2 T}$$

Οπότε

$$X_3(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right) e^{-i\omega T} - \left(-\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(-\omega) \right) e^{+i\omega T} - \frac{2 \cos \omega T}{i\omega} + \frac{2 \sin \omega T}{i\omega^2 T}$$

Κι επομένως

$$X_3(\omega) = \frac{2}{i\omega} \operatorname{sinc} \omega T$$

4. Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των ακόλουθων

(a) $X_1(\omega) = \frac{4e^{-i\omega}}{4+\omega^2}$

Απάντηση

$$x_1(t) = e^{-2|t-1|}$$

(b) $X_2(\omega) = \cos^2(4\omega - \frac{\pi}{7})$

Απάντηση

$$X_2(\omega) = \frac{1 + \cos(8\omega - \frac{2\pi}{7})}{2}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2\pi i}{7}} \delta(t+8) + e^{\frac{2\pi i}{7}} \delta(t-8) \right)$$

(c) $X_3(\omega) = \begin{cases} 1 & -W \leq \omega < 0 \\ -1 & 0 \leq \omega \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

Απάντηση

$$x_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^0 e^{i\omega t} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^W e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2i\pi t} (1 - e^{-iWt}) - \frac{1}{2i\pi t} (e^{iWt} - 1)$$

Κι επομένως

$$x_3(t) = \frac{2 - e^{-iWt} - e^{iWt}}{2i\pi t} = \frac{1 - \cos Wt}{i\pi t} = \frac{2 \sin^2 \frac{Wt}{2}}{i\pi t}$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 6**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>