



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

# **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**

**Υποδείξεις Άσκησης 7**

**Γιώργος Τζιρίτας**

**Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς**

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

**7<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων**

Απαντήσεις

1. Θεωρήστε ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα με απόκριση στις συχνότητες

$$H(\omega) = \frac{1}{3 + i\omega}.$$

Εάν η έξοδος του συστήματος στο σήμα  $x(t)$  είναι

$$y(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})u(t),$$

να ευρεθεί το σήμα εισόδου  $x(t)$ .

**Απάντηση**

Αφού

$$Y(\omega) = \frac{1}{(3 + i\omega)(4 + i\omega)},$$

ο μετασχηματισμός Fourier του  $x(t)$  θα είναι

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{1}{4 + i\omega}$$

Άρα

$$x(t) = e^{-4t}u(t).$$

2. Ας είναι  $x(t)$  το σήμα με μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5),$$

και ας είναι

$$h(t) = u(t) - u(t - 2).$$

- (a) Είναι το  $x(t)$  περιοδικό;

**Απάντηση**

Όχι, διότι ο λόγος των 5 και  $\pi$  δεν είναι λόγος ακεραίων.

- (b) Είναι η συνέλιξη του  $x(t)$  με το  $h(t)$  περιοδικό σήμα;

**Απάντηση**

Ναι, επειδή  $H(\pi) = 0$ .

- (c) Μπορεί η συνέλιξη δύο μη περιοδικών σημάτων να είναι περιοδικό σήμα;

**Απάντηση**

Ναι, όπως προκύπτει ανωτέρω.

3. Ας είναι η απόκριση στις συχνότητες ενός συστήματος

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega}{1 + i\omega}.$$

- (a) Να ευρεθεί το μέτρο και η φάση  $\varphi(\omega)$  ως συνάρτηση της συχνότητας.

**Απάντηση**

$$|H(\omega)| = 1, \varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$$

- (b) Να δοθεί η καθυστέρηση ομάδας που ορίζεται ως

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$$

Η καθυστέρηση ομάδας για  $\omega > 0$  είναι θετική ή αρνητική;

**Απάντηση**

$$\tau(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Η καθυστέρηση ομάδας για  $\omega > 0$  είναι θετική.

- (c) Να ευρεθεί η χρονστική απόκριση του συστήματος.

**Απάντηση**

$$H(\omega) = 2 - \frac{1}{1 + i\omega}.$$

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t).$$

- (d) Να ευρεθεί η απόκριση του συστήματος, εάν η είσοδος είναι

$$x(t) = \cos \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos t + \cos \sqrt{3}t.$$

**Απάντηση**

$$X(\omega) = \pi(\delta(\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}) + \delta(\omega - \frac{1}{\sqrt{3}})) + \pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)) + \pi(\delta(\omega + \sqrt{3}) + \delta(\omega - \sqrt{3}))$$

Γενικά η απόκριση στο σήμα  $\cos \omega_0 t$  είναι  $\cos(\omega_0 t - 2 \arctan \omega_0)$ , οπότε

$$y(t) = \cos(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}) + \cos(t - \frac{\pi}{2}) + \cos(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3})$$

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

## •Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 7**». Έκδοση: 1.0.  
Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>