



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 10

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

10^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

1. Να ευρεθούν τα ακόλουθα αθροίσματα και η περιοχή σύγκλισης για το καθένα από αυτά

$$\alpha) \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n}$$

Απάντηση Συγκλίνει για $|z| > 1/2$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n} = \frac{z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^n$$

Απάντηση Συγκλίνει για $|z| < 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^n = \frac{1}{1 - 2z}$$

$$\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) z^{-n}$$

Απάντηση Συγκλίνει για $|z| > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) z^{-n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}} \right) = \frac{1}{1 - z^{-2}}$$

$$\delta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n}$$

Απάντηση Συγκλίνει για $1/2 < |z| < 2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}z}\right)^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \left(e^{i\frac{\pi}{4}z}\right)^{-n}$$

$$= \frac{3}{2 \left(5 - 2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}z^{-1}} + e^{-i\frac{\pi}{4}z}\right)\right)} + \frac{3}{2 \left(5 - 2 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}z^{-1}} + e^{i\frac{\pi}{4}z}\right)\right)}$$

$$= \frac{15 - 6 \cos \frac{\pi}{4} (z^{-1} + z)}{25 - 20 \cos \frac{\pi}{4} (z^{-1} + z) + 4(z^{-2} + z^2)}$$

$$\epsilon) \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n}$$

Απάντηση Συγκλίνει για $|z| < 1/3$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)(3z)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(3e^{i\frac{\pi}{4}z}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(3e^{-i\frac{\pi}{4}z}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 3e^{i\frac{\pi}{4}z}} + \frac{1}{1 - 3e^{-i\frac{\pi}{4}z}} \right) = \frac{1 - 3 \cos \frac{\pi}{4}z}{1 - 6 \cos \frac{\pi}{4}z + 9z^2} \end{aligned}$$

2. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Z και η περιοχή σύγκλισης για τα ακόλουθα σήματα. Για ποιά από αυτά υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier;

(a) $\delta(n+1) - \delta(n-1)$

Απάντηση $z - z^{-1}$

Υπάρχει για $|z| > 0$ και υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.

(b) $(-1)^n u(n)$

Απάντηση $\frac{1}{1+z^{-1}}$

Συγκλίνει για $|z| > 1$, οπότε δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.

(c) $2^n u(-n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1)$

Απάντηση

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} + \frac{1}{4(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

Συγκλίνει για $1/4 < |z| < 1/2$, οπότε δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.

(d) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(3-n)$

Απάντηση

$$\frac{z^{-3}}{4^3(1-4z)}$$

Συγκλίνει για $|z| < 1/4$, οπότε δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.

(e) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^0 (-n)\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} \\ &= \frac{z^{-1}}{2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{z}{2\left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2} = \frac{5(z^{-1} - z)}{8\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2} \end{aligned}$$

Συγκλίνει για $1/2 < |z| < 2$ και υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier.

3. Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, \quad |z| > 2.$$

Απάντηση

$$X(z) = \frac{2}{9(1 - z^{-1})} + \frac{7}{9(1 + 2z^{-1})}$$

$$x(n) = \frac{1}{9} (2 + 7(-2)^n) u(n)$$

4. Δίδεται ο μετασχηματισμός Z

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 1.45z^{-2} - \frac{81}{125}z^{-3} + \frac{324}{625}z^{-4}}$$

Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση z -plane για να παραστήσετε γραφικά τους πόλους και τα μηδενικά του μετασχηματισμού και τη συνάρτηση $roots$ για να βρείτε τους πόλους. Να δώσετε αναλυτική έκφραση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Απάντηση

Οι πόλοι είναι : $r_1 e^{\pm\theta_1}, r_2 e^{\pm\theta_2}$, όπου $r_1 = 0.9, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, r_2 = 0.8, \theta_2 = \frac{\pi}{3}$. Οπότε

$$H(z) = \frac{1}{(1 - r_1 e^{i\theta_1} z^{-1})(1 - r_1 e^{-i\theta_1} z^{-1})(1 - r_2 e^{i\theta_2} z^{-1})(1 - r_2 e^{-i\theta_2} z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{z^4}{(z - r_1 e^{i\theta_1})(z - r_1 e^{-i\theta_1})(z - r_2 e^{i\theta_2})(z - r_2 e^{-i\theta_2})}$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρωτικά υπόλοιπα δίδουν

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \frac{r_1^{n+2} e^{i(n+3)\theta_1} u(n)}{(e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1})(r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2})(r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{-i\theta_2})} \\ &+ \frac{r_1^{n+2} e^{-i(n+3)\theta_1} u(n)}{(e^{-i\theta_1} - e^{i\theta_1})(r_1 e^{-i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2})(r_1 e^{-i\theta_1} - r_2 e^{-i\theta_2})} \\ &= \frac{r_1^{n+2} \sin((n+3)\theta_1 - \phi_1) u(n)}{\rho^2 \sin \theta_1} \end{aligned}$$

θέτοντας $(r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2})(r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{-i\theta_2}) = \rho^2 e^{i\phi_1}$. Τελικά

$$h(n) = \frac{r_1^{n+2} \sin((n+3)\theta_1 - \phi_1) u(n)}{\rho^2 \sin \theta_1} + \frac{r_2^{n+2} \sin((n+3)\theta_2 - \phi_2) u(n)}{\rho^2 \sin \theta_2}$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 10**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>