



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 11

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

11^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

1. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t - t_0).$$

Ας είναι το σήμα

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}u(-t - t_1).$$

Για ποιές τιμές των A και t_1 η αλγεβρική έκφραση των μετασχηματισμών των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι ίδια; Ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης για τον καθένα από τους παραπάνω μετασχηματισμούς;

Απάντηση

$$X(s) = \frac{e^{-(s+\alpha)t_0}}{s + \alpha}$$

$$Y(s) = A \int_{-\infty}^{-t_1} e^{-(s+\alpha)t} dt = -Ae^{(s+\alpha)t_1} \int_{\infty}^0 e^{(s+\alpha)t} dt = -A \frac{e^{(s+\alpha)t_1}}{s + \alpha}$$

Άρα πρέπει $A = -1$ και $t_1 = -t_0$.

2. Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του

$$X(s) = \frac{2(s + 2)}{s^2 + 7s + 12}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > -3$.

Απάντηση

$$X(s) = \frac{2(s + 2)}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2(s + 2)}{(s + 3)(s + 4)} = \frac{4}{s + 4} - \frac{2}{s + 3}$$

$$x(t) = (4e^{-4t} - 2e^{-3t})u(t)$$

3. Ας είναι το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο και αιτιατό σύστημα του οποίου η σχέση εισόδου εξόδου δίδεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(1 + \alpha)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2y(t) = x(t).$$

- (a) Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ αυτού του συστήματος.

Απάντηση

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + (1 + \alpha)s^2 + \alpha(1 + \alpha)s + \alpha^2} = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + \alpha s + \alpha^2)}$$

Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$-1, -\frac{\alpha(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι το δεξιό ημιεπίπεδο που ορίζεται από το μέγιστο του πραγματικού μέρους των ριζών.

- (β) Να ευρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$. Για ποιές τιμές του α το σύστημα είναι ευσταθές;
Απάντηση Το σύστημα είναι ευσταθές για $\alpha > 0$. Γράφουμε με τα αντίθετα των ριζών

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\rho)(s+\bar{\rho})} = \frac{A_0}{s+1} + \frac{A_1}{s+\rho} + \frac{A_2}{s+\bar{\rho}}$$

$$A_0 = \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, A_1 = \frac{\alpha+1+\rho}{(\bar{\rho}-\rho)(1+\alpha+\alpha^2)}, A_2 = \bar{A}_1$$

$$H(s) = \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1+\alpha}{(s+\rho)(s+\bar{\rho})} \right)$$

$$H(s) = \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+\frac{\alpha}{2}}{(s+\frac{\alpha}{2})^2 + \frac{3}{4}\alpha^2} - \frac{1+\frac{\alpha}{2}}{(s+\frac{\alpha}{2})^2 + \frac{3}{4}\alpha^2} \right)$$

Επομένως

$$h(t) = \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \left(e^{-t} - e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{3}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}t\right) \right) u(t)$$

- (c) Ας είναι

$$\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = g(t).$$

Να ευρεθούν οι πόλοι του $G(s)$.

Απάντηση

$$G(s) = (1+s)H(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \alpha^2}$$

Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$-\frac{\alpha(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

•Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 11**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>