



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 2: Ολοκληρώματα και σειρές ρητών συναρτήσεων

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Φροντιστήριο σε ολοκληρώματα και σειρές ρητών συναρτήσεων

Ας είναι, με α πραγματικό, η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2\alpha z + 1}, \alpha > 1.$$

Οι δύο ρίζες του πολωνύμου είναι $\rho_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\rho_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$, οπότε η συνάρτηση αναλύεται σε μερικά κλάσματα ως εξής

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{z - \rho_1} - \frac{1}{z - \rho_2} \right).$$

Ισχύει ότι

$$\rho_2 < -1 < \rho_1 < 0, |\rho_2| > 1 > |\rho_1|.$$

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1}$$

σε κύκλο ακτίνας r για τρεις περιπτώσεις: α) $r < |\rho_1|$, β) $|\rho_1| < r < |\rho_2|$ και γ) $r > |\rho_2|$.

Στην περίπτωση (α) η συνάρτηση είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου, άρα το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Στην περίπτωση (β) θα έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z - \rho_1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \rho_2} \right).$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επειδή $r < |\rho_2|$, ενώ το πρώτο δίδεται από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1} = \frac{\pi i}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Στην περίπτωση (γ) θα έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z - \rho_1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \rho_2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} (2\pi i - 2\pi i) = 0.$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του μοναδιαίου κύκλου που εμπίπτει στην περίπτωση (β)

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1} = \frac{\pi i}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Θέτουμε τον $z = e^{it}$ σε πολική μορφή, οπότε έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{2it} + 2\alpha e^{it} + 1} = \int_0^{2\pi} \frac{idt}{e^{it} + 2\alpha + e^{-it}} = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + \cos t}$$

Αποδείχθηκε επομένως ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\alpha + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης $f(z)$ για τις τρεις περιπτώσεις.

1. $|z| < |\rho_1|$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{z - \rho_1} - \frac{1}{z - \rho_2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{\rho_2 \left(1 - \frac{z}{\rho_2}\right)} - \frac{1}{\rho_1 \left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right)} \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho_2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho_1^{n+1}} \right)$$

2. $|\rho_1| < |z| < |\rho_2|$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{z - \rho_1} - \frac{1}{z - \rho_2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{\rho_2 \left(1 - \frac{z}{\rho_2}\right)} + \frac{1}{z \left(1 - \frac{\rho_1}{z}\right)} \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho_2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^{n-1} z^{-n} \right)$$

3. $|z| > |\rho_2|$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{z - \rho_1} - \frac{1}{z - \rho_2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{1}{z \left(1 - \frac{\rho_1}{z}\right)} - \frac{1}{z \left(1 - \frac{\rho_2}{z}\right)} \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^{n-1} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_2^{n-1} z^{-n} \right)$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Φροντιστήριο 2: Ολοκληρώματα και σειρές ρητών συναρτήσεων**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://elearn.uoc.gr/course/view.php?id=420/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

