



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 5: Μετασχηματισμός Fourier

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Φρονιστήριο σε μετασχηματισμό Fourier (3-4-2015)

1. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$. Υποθέστε ότι.

- (a) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη αρνητικό.
- (b) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $(1 + i\omega)X(\omega)$ είναι $Ae^{-2t}u(t)$.
- (c)

$$\frac{1}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

Να ευρεθεί το σήμα $x(t)$.

Απάντηση

Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ θα είναι

$$X(\omega) = \frac{A}{(1 + i\omega)(2 + i\omega)}$$

Άρα

$$x(t) = A(e^{-t} - e^{-2t})u(t).$$

Λόγω της σχέσης του Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = 1.$$

Οπότε βρίσκοντας το ολοκλήρωμα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x(t)$ είναι μη αρνητικό, βρίσκουμε $A = \sqrt{12}$.

2. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$. Υποθέστε ότι.

- (a) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
- (b) $x(t) = 0$ για $t \leq 0$.
- (c) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του πραγματικού μέρους του $X(\omega)$ είναι $|t|e^{-|t|}$.

Να ευρεθεί το σήμα $x(t)$.

Απάντηση

Αφού το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, το $x(t) + x(-t)$ θα έχει μετασχηματισμό Fourier διπλάσιο του πραγματικού μέρους του $X(\omega)$. Επομένως

$$x(t) + x(-t) = 2|t|e^{-|t|}.$$

Αφού $x(t) = 0$ για $t \leq 0$,

$$x(t) = 2te^{-t}.$$

3. Να ευρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \frac{\sin^2(3\omega) \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Απάντηση

Βρίσκουμε κατάρχη τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του

$$X_1(\omega) = \frac{\sin(3\omega)}{\omega}$$

που είναι

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$$

Η συνέλιξη αυτού με τον εαυτό του είναι

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 x_1(t - \tau) d\tau = \frac{1}{4}(6 - |t|).$$

Τελικά θα είναι

$$h(t) = \frac{1}{2}(x_2(t+1) + x_2(t-1)) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & |t| < 1 \\ -\frac{|t|}{4} + \frac{3}{2}, & 1 \leq |t| \leq 5 \\ -\frac{|t|}{8} + \frac{7}{8}, & 5 \leq |t| \leq 7 \\ 0, & |t| > 7 \end{cases}$$

4. Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{4}}{k\frac{\pi}{4}} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

(a) Να ευρεθεί το $g(t)$ ώστε

$$x(t) = \frac{\sin t}{\pi t} g(t).$$

(b) Να αιτιολογηθεί γιατί το $X(\omega)$ είναι περιοδικό και να προσδιορισθεί το $X(\omega)$ στην κύρια περίοδο.

Απάντηση

Έχουμε ότι

$$\frac{\sin t}{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{4}}{k\frac{\pi}{4}} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα

$$g(t) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$ θα είναι

$$G(\omega) = 8\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 8k).$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ θα είναι

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(8\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(\omega - 8k) \right) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(\omega - 8k)$$

που είναι περιοδική συνάρτηση του ω και όπου

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Στην κύρια περίοδο θα είναι

$$X(\omega) = \begin{cases} 4, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & 4 \geq |\omega| > 1 \end{cases}$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Φροντιστήριο 5: Μετασχηματισμός Fourier**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://elearn.uoc.gr/course/view.php?id=420/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

