



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 14η: Τυχαίες Διαδικασίες

Ιωάννης Στυλιανού

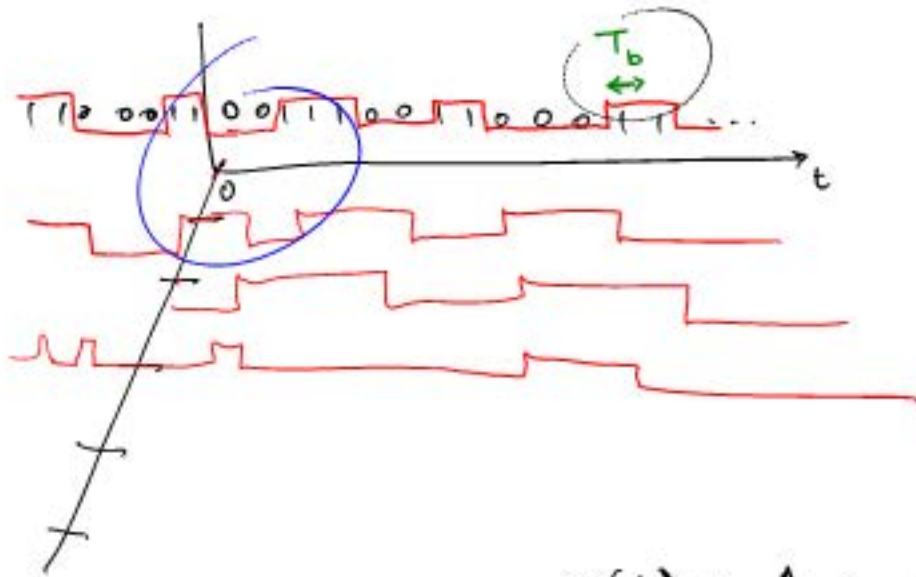
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 215

Διάλεξη 14

Τυχ. Διαδικασίες

---



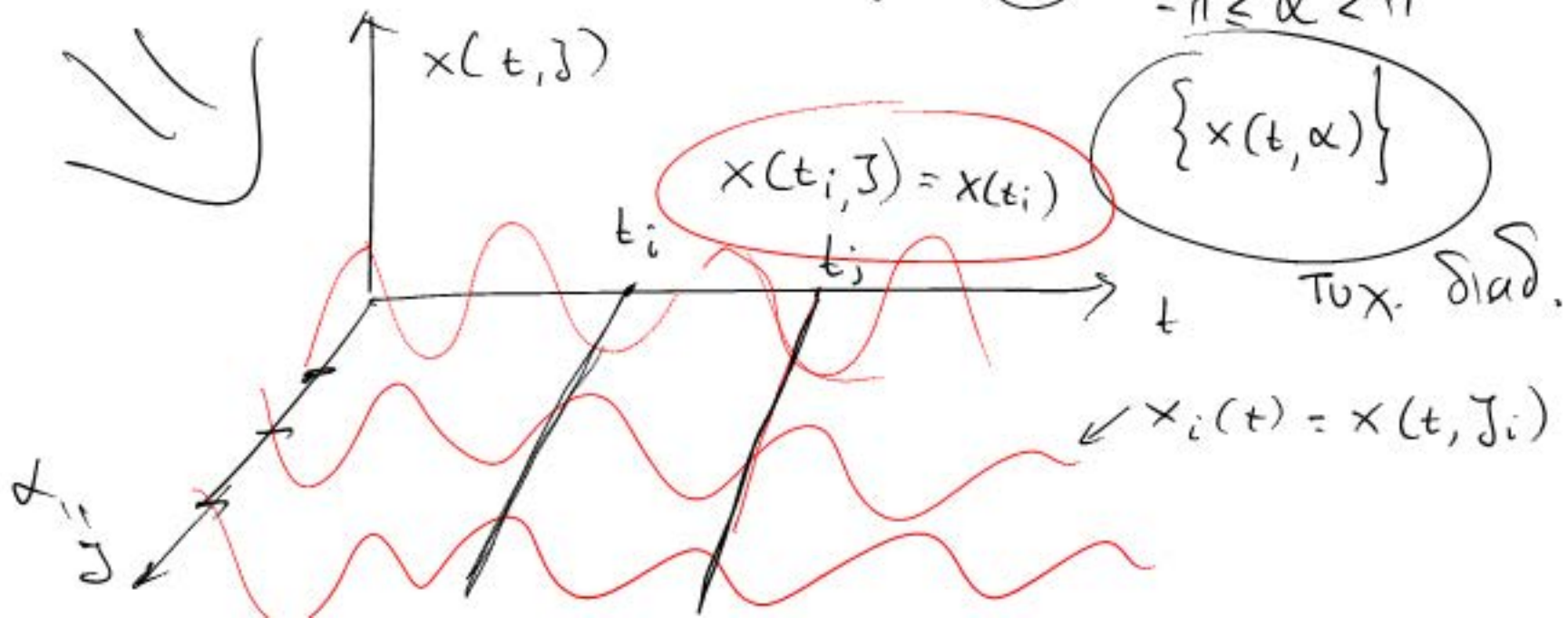
Στοιχ. Διαδρασίν

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \alpha)$$

$$= A \cos(2\pi f_c t + \alpha)$$

$$-\pi \leq \alpha < \pi$$

$$\{x(t, \alpha)\}$$



Χρόνος χώρος

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

χρον. μέσος όρος

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^*(t) x_i(t+\tau) dt$$

αυτοσ. στο χρόνο

Στατιστικός χώρος

Συνάρτηση κατανομής  $\rightarrow$   $T_{ox}$ . Μετ

$$F_{X(t_i)}(x) = \text{Prob}(X(t_i) \leq x)$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθαν.

pdf  $P_{X(t_i)}(x) = \frac{dF_{X(t_i)}(x)}{dx}$

Στατιστική μέση τιμή:

$$E\{X(t_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X(t_i)}(x) dx$$

Από κοινού συν. κατατ.  $T_{ox}$ .  $t_i$   
 $F_{X(t_i)X(t_j)}(x_1, x_2) = \text{Prob}(X(t_i) \leq x_1, X(t_j) \leq x_2)$

Από κοινού συν. πυκν. πιθαν.  
 joint pdf

$$p_{X(t_i)X(t_j)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{X(t_i)X(t_j)}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Στατιστική αυτ. όσ.

$$R_x(t_i, t_j) = E\{X(t_i)X(t_j)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X(t_i)X(t_j)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$E\{X(t)\} = \mu_x \quad E\{X^2(t)\}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x^2 p_x(x) dx -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x x p_x(x) dx = E\{X^2(t)\} + \mu_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx -$$

$$- 2 \mu_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx}_{\mu_x} = E\{X^2(t)\} + \mu_x^2 - 2\mu_x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = E\{X^2(t)\} - \mu_x^2 \Rightarrow \boxed{E\{X^2(t)\} = \sigma^2 + \mu_x^2}$$

• Av.  $E\{x(t_i)\} = C \quad \forall t$  Στασιμότητα 1ης τάξεως

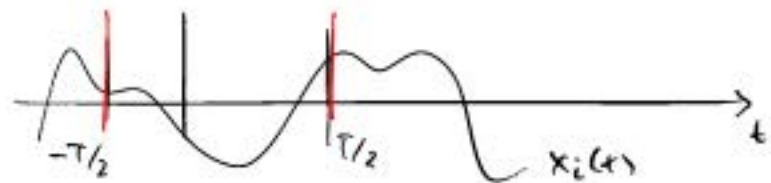
• Av.  $E\{x(t_i), x(t_j)\} = f(|t_i - t_j|)$  Στασιμότητα 2ης τάξεως

$$R_x(t_i, t_j) = f(\tau) \quad \text{όπου } \tau = |t_i - t_j|$$

• Av.  $\bar{X} = E\{x(t_i)\}$ ,  $\varphi_x(\tau) = [R_x(t_i, t_j) = f(\tau)]$

Εργασιακή

Στασιμότητα 2ης τάξεως = Στασιμότητα 1ης τάξεως  
που επίσης ισχύει



$$x_i(t, T) = x_i(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X_i(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t, T) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\Phi_i(f, T) = \frac{1}{T} |X_i(f, T)|^2$$

periodogram

$$P_{x_i}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(f, T) df$$

$$\Phi_x(f, T) = E \{ \Phi_i(f, T) \}$$

?  $\Phi_x(f)$  =  $\lim_{T \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(f, T) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X_i(f, T)|^2 \right\}$

Wiener-Khinchin:  $\Phi_x(f) = F \{ R_x(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$

$$\Phi_{x_i}(f, T) = \frac{1}{T} |X_i(f, T)|^2 = \frac{1}{T} X_i^*(f, T) X_i(f, T)$$

$$X_i(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\begin{aligned} \Phi_{x_i}(f, T) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t') \text{rect}\left(\frac{t'}{T}\right) e^{+j2\pi f t'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t') x_i(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t'}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f (t-t')} dt dt' \end{aligned}$$

$$\tau = t - t'$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) x_i(t-\tau) \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau$$

$$\Phi_x(f, T) = E\{\Phi_{x_i}(f, T)\} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E\{x_i(t) x_i(t-\tau)\}}_{R_x(\tau)} \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \left[ 1 - \frac{|\tau|}{T} \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$T \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$$



$$\Phi_x(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot \left(1 - \frac{|z|}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_x(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$P_A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi \leq \alpha < \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_A(\alpha) d\alpha = 1 \quad \left| \begin{array}{l} E(x) = \int x p_x(x) dx \\ E\{g(x)\} = \int g(x) p_x(x) dx \end{array} \right.$$

$$t_i: x(t_i) = A \sin(\omega t_i + \alpha)$$

$\uparrow$   $\pi \omega x$   $|-2\pi \alpha \rho \rangle \pi 2\pi i$

Erwartungswert:

$$\mu_{x(t_i)} = E\{x(t_i)\} = \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\omega t_i + \alpha) P_A(\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t_i + \alpha) d\alpha = 0$$

XP. Erwartungswert:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(\omega t + \alpha_i) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t + \alpha_i) dt$$
$$= 0$$

$$E\{A \sin(\omega t_i + \alpha)\} = 0 \quad \forall t_i \Rightarrow E\{A \sin(\omega t + \alpha)\} = 0$$

Στατ. Αυτοσυσχ.

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) X(t_2)\} = A^2 E\left[\sin(\omega t_1 + \alpha) \sin(\omega t_2 + \alpha)\right]$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b) \Rightarrow$$

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} E\left[\cos(\omega \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\tau})\right] - \frac{A^2}{2} E\left[\cos(\omega \underbrace{(t_1 + t_2)}_{t'} + 2\alpha)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\omega \tau) \Rightarrow R_X(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

Στάσιμα 2ης τάξης

$$\Phi_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) X(t+\tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$\Phi_X(\tau) = R_X(\tau)$$

ΕΡΓΟ ΔΙΚΗ

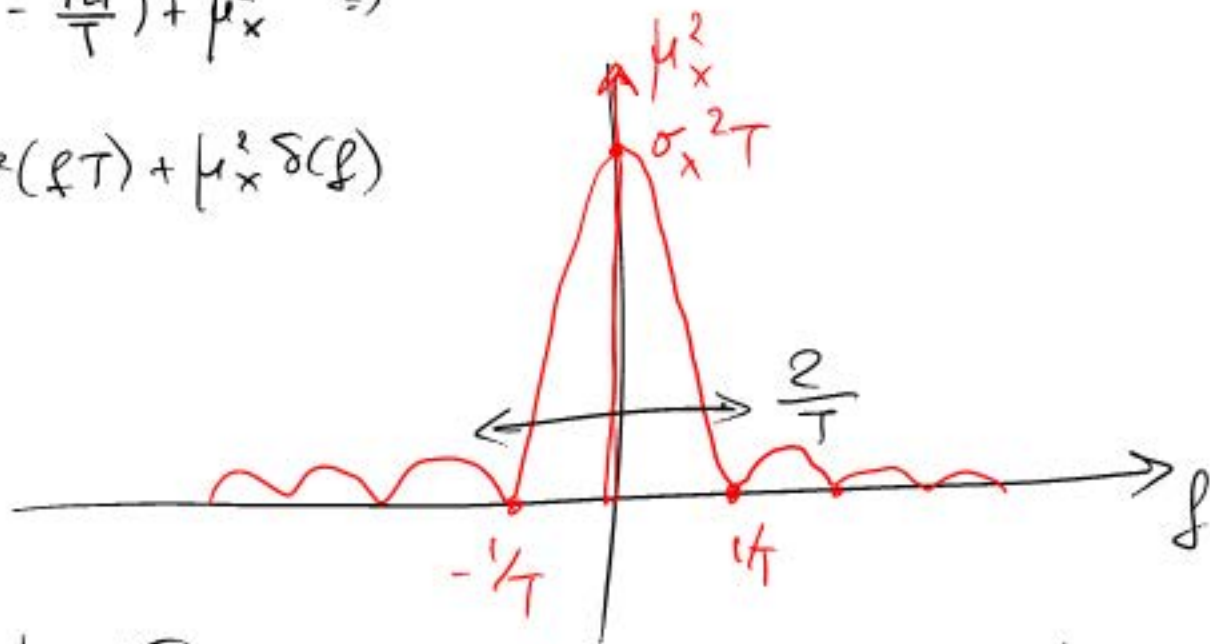
$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \rightarrow R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$

$$\Phi_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$$

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \mu_x^2 \Rightarrow$$

$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 T \text{sinc}^2(fT) + \mu_x^2 \delta(f)$$



T

Υψηλός ρυθμός περτάσεων : μικρό T → μέγ. εύρος φάσματος  
 Χαμηλός ρυθμός περτάσεων : μεγάλο T → μικ. εύρος φάσματος

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 14η: Τυχαίες Διαδικασίες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>