



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 20η: Διακριτός Μετασχηματισμός  
Fourier

Ιωάννης Στυλιανού  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY 215

$$x(t) \rightarrow X(f)$$

$$x(nT_s) \rightarrow X(f) = X(f + f_s) \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$T_s = 1$$

διακριτών χρόνων ορίφα ≠ ψηφιακός

$$X[n] \rightarrow \boxed{T\{x(n)\}} \rightarrow y[n]$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$X(f) = \sum_n x(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s}$$

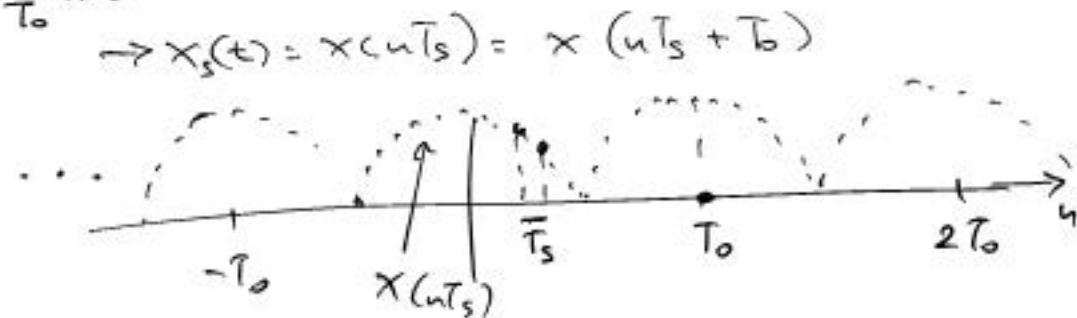
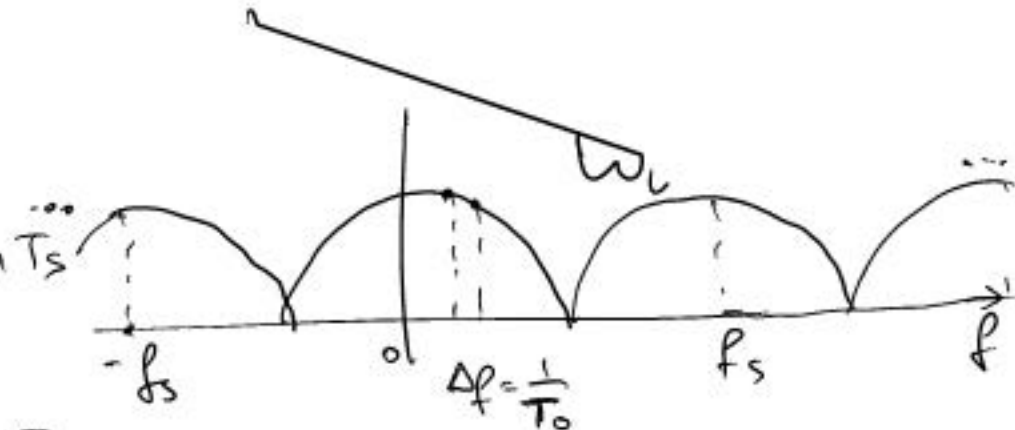
$$X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_n x(nT_s) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} n T_s}$$

$$W_N = e^{j\frac{2\pi}{N} n}$$

$$X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_n x(nT_s) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n}$$

$$\Rightarrow X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_n x(nT_s) W_N^{-kn}$$

$$N = \frac{T_0}{T_s}$$



$$X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) W_N^{-kn}$$

$$W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

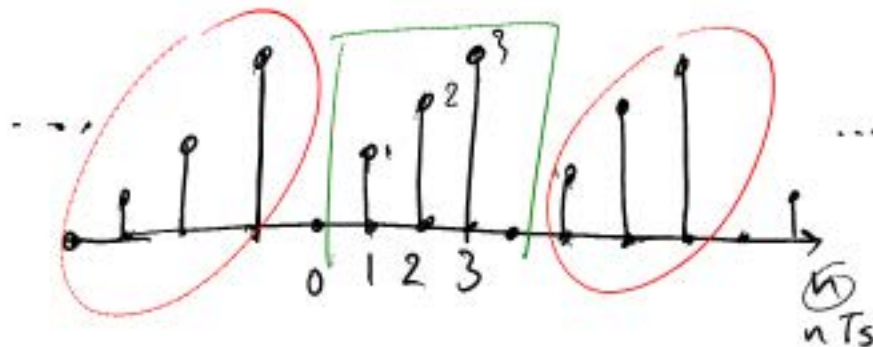
$$x(nT_s) = \frac{1}{NT_s} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X\left(\frac{k}{T_0}\right) W_N^{kn}$$

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} \quad \leftarrow$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(k) W_N^{kn} \quad \leftarrow$$

$N_0 = 4$



$$x[2] = 2$$

~~$$x[2, 3]$$~~

$$x[4] = 0$$

$$x[5] = 0$$

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} W_m[n] W_k^*[n] = \begin{cases} a & m=k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}} \Rightarrow \underbrace{W_N^{kn}}_{W_k[n]} = e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a=1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N \\ \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} kN}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k}} = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \langle N \rangle} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{a.s.o.} \end{cases}$$

$$\sum_{n \in \langle N \rangle} W_m[n] W_k^*[n] = \sum_{n \in \langle N \rangle} e^{j \frac{2\pi}{N} mn} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} =$$

$$= \sum_{n \in \langle N \rangle} e^{j \frac{2\pi}{N} (m-k)n} = \begin{cases} N & m=k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

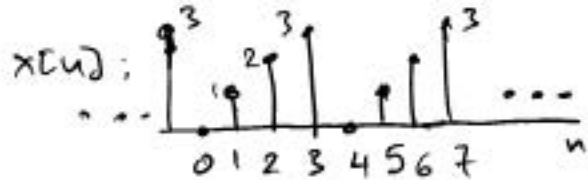
$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} X[m] e^{j \frac{2\pi}{N_0} mn} = \sum_{m=0}^{N_0-1} X[m] W_{N_0}^{mn} \Rightarrow \begin{cases} W_{N_0}^{mn} = W_m^{kn} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] W_k^*[n] &= \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{m=0}^{N_0-1} X[m] W_m^{kn} \cdot W_k^*[n] = \\ &= \sum_{m=0}^{N_0-1} X[m] \sum_{n=0}^{N_0-1} W_m^{kn} \cdot W_k^*[n] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] W_k^*[n] = N_0 X[k] \Rightarrow \begin{cases} 0 & m \neq k \\ N_0 & m = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow X[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] W_k^*[n]$$

$$e^{-j \frac{2\pi}{N_0} kn}$$



$N_0 = 4$

$$W_{N_0}^{kn} = e^{j \frac{2\pi}{N_0} kn}$$

$$\frac{2\pi}{N_0} = \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$X[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N_0} kn} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^{kn}$$

$$e^{-j \frac{2\pi}{N_0} kn} = e^{-j \frac{\pi}{2} kn} = -j$$

$$\underline{k=0} \quad X[0] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] = \frac{1}{4} (0+1+2+3) = \frac{6}{4}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{N_0}^{k0} \\ W_{N_0}^{k1} \\ W_{N_0}^{k2} \\ W_{N_0}^{k3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\underline{k=1} \quad X[1] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^n = \frac{1}{4} (x[0] + x[1](-j) + x[2](-j)^2 + x[3](-j)^3)$$

$$= -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2}$$

$$\underline{k=2} \quad X[2] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^{2n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-1)^n = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{k=3} \quad X[3] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] (-j)^{3n} = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{N_0}^{00} & W_{N_0}^{01} & \dots & W_{N_0}^{0(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{N_0}^{k0} & W_{N_0}^{k1} & \dots & W_{N_0}^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{N_0}^{(N-1)0} & W_{N_0}^{(N-1)1} & \dots & W_{N_0}^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}[0] \\ X[0] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = W_{N_0}^{kN} \cdot x}$$

DFT

$$k = 0 \dots N-1$$

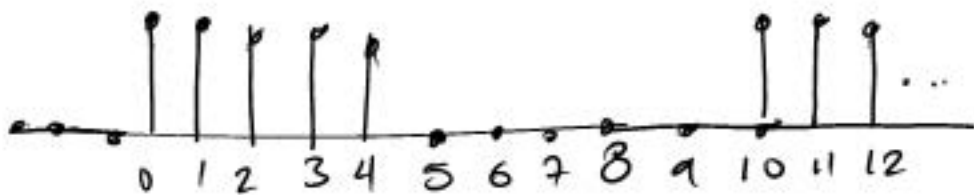
$$n = 0 \dots N-1$$

$$c = A \cdot b$$

$$A \{ b \}$$

$$\bar{X} = W_{N_0}^{*kN} X$$





$$x[n] = x[n+10]$$

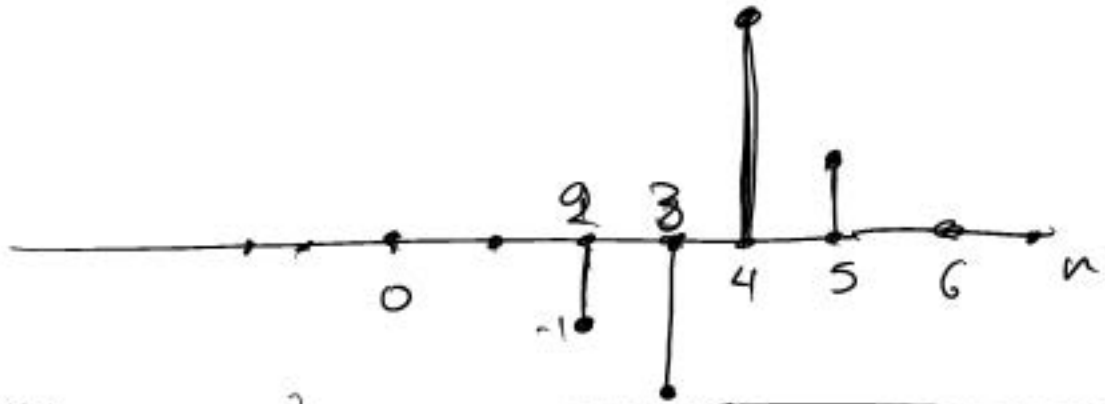
$$N_0 = 10$$

$$X[k] = \frac{1}{10} \left( e^{-j k \frac{2\pi}{5}} \right)$$

$$\frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)}$$

$$X_1[n] = x[n+2]$$

$$x[n] = \begin{cases} -1, & n=2 \\ -2, & n=3 \\ 3, & n=4 \\ 1, & n=5 \end{cases}$$



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

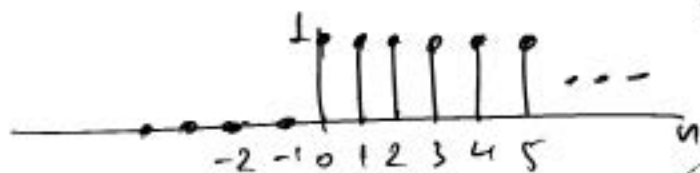
$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

3

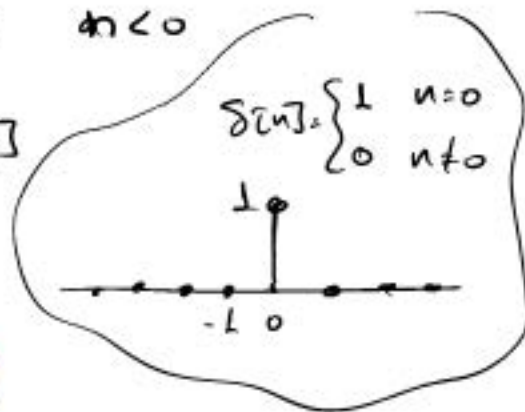
~~$$x[n] = -1 \delta[n-2] - 2 \delta[n-3] + 3 \delta[n-4] + 1 \delta[n-5]$$~~

$$x[n] + 2x[n-1]$$

$$e(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightsquigarrow u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$u[n]$



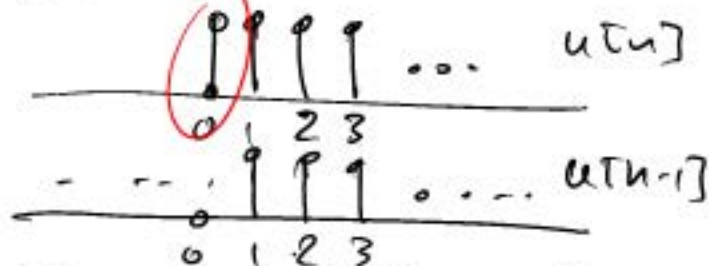
•  $u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$  ~~X~~ ✓ (1)

$n = -1$   $u[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \delta[k] = 0$

$n = 0$   $u[0] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[k] = 1$

$n = 100$   $u[100] = \sum_{k=-\infty}^{100} \delta[k] = 1$

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$  ✓



•  $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$  (2)

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 20η: Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://ww.csd.uoc.gr/~hy215>