



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

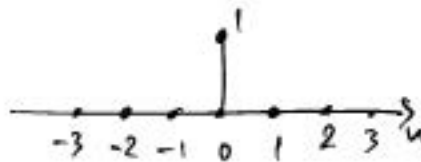
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 21η: Σήματα και Συστήματα
Διακριτού Χρόνου

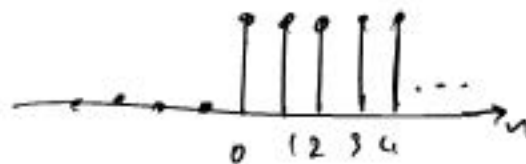
Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY215

• $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



• $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

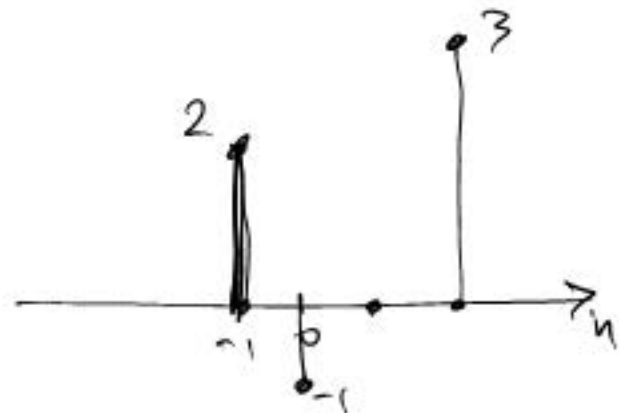


$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

• $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$



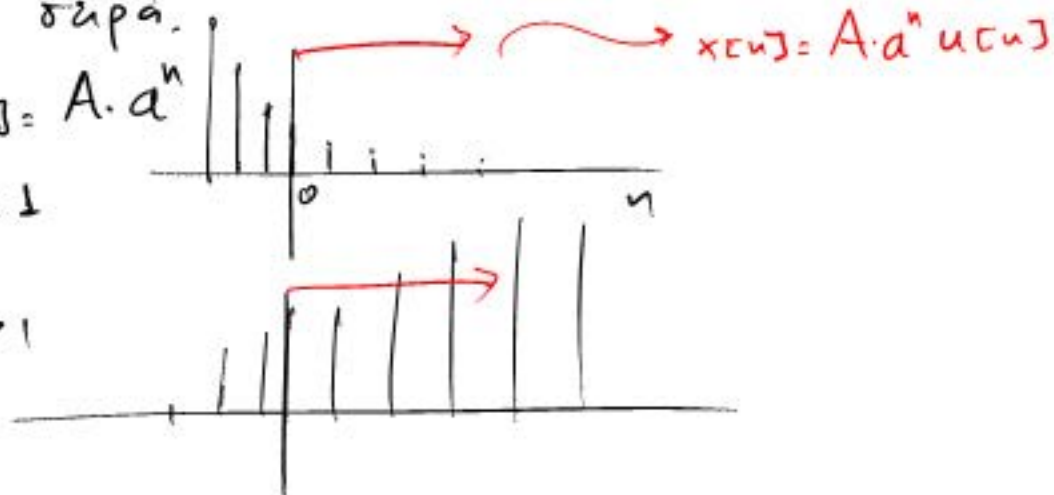
$$x[n] = 2\delta[n+1] - 1\delta[n] + 3\delta[n-2]$$

- Εκθετική σειρά.

$$x[n] = A \cdot a^n$$

$$|a| < 1$$

$$|a| > 1$$



- Ημιτονοειδής σειρά

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

↑
πλάτος

↑ φάση
phase fractions

- Μικρό. Εκθ. Σειρά: $x[n] = A \cdot a^n$

$$A = |A| \cdot e^{j\phi}$$

$$a = |a| \cdot e^{j\omega_0}$$

$$\Rightarrow x[n] = |A| \cdot e^{j\phi} \cdot |a|^n \cdot e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow x[n] = |A| |a|^n \cdot e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

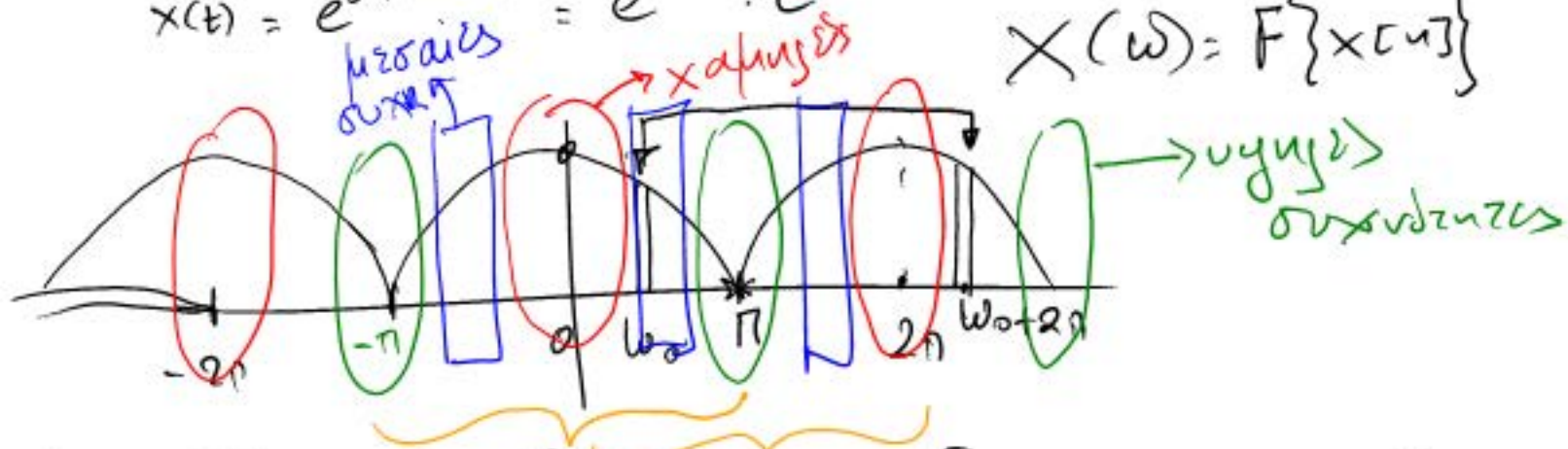
$$x[n] = A \cdot e^{j\omega_0 n} \rightarrow x'[n] = A \cdot e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = A e^{j\omega_0 n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n}}_{n \in \mathbb{Z}} = A e^{j\omega_0 n}$$

$$\omega'_0 = \omega_0 + 2\pi$$

$$\omega'_0 > \omega_0$$

$$x(t) = e^{j(\omega_0 + 2\pi)t} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j2\pi t}$$

$$X(\omega) = F\{x[n]\} \uparrow x[n]$$



$$x[n] = x[n+N] \quad N \text{ periods } \omega_0 \text{ } x[n]$$

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

$$\int_{-A}^A x[n] = x[n+N] \Rightarrow \omega_0 N = k 2\pi$$

$$x[n+N] = A \cos(\omega_0 n + \phi + \omega_0 N)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

N sygnyis

$$\triangleright x_1(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 8$$

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \Rightarrow T_0 = \frac{8}{3}$$

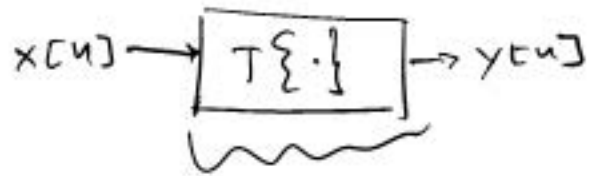
$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\omega_0 N = k \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot N = k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = k \cdot 8 \quad \left| \begin{array}{l} k=1 \\ \Rightarrow N=8 \end{array} \right.$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

$$\frac{3\pi}{4} N = k \cdot 2\pi \Rightarrow N = k \cdot \frac{8}{3} \quad \left| \begin{array}{l} k=3 \\ \Rightarrow N=8 \end{array} \right.$$



▷ $y[n] = x[n - n_d]$

▷ $y[n] = \log_{10} x[n]$

▷ $y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$ κυστώ-εως μέσης τιμής
Moving Average.

▷ $y[n] = (x[n])^2$ ← χωρίς τμήση, ΔΕΝ είναι γραμμικό.

▷ Γραμμικό σύστημα: $T\{a x_1[n] + \beta x_2[n]\} =$
 $= a T\{x_1[n]\} + \beta T\{x_2[n]\} = a y_1[n] + \beta y_2[n]$

$x_k[n] \xrightarrow{T} y_k[n]$

$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{T} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$

$T = \{y[n] = (x[n])^2\}$ $x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] = x_1^2[n]$, $x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n] = x_2^2[n]$

Αν. Γρ. $x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{T} x_1^2[n] + x_2^2[n]$ $x[n] \xrightarrow{T} y[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n] + 2x_1[n]x_2[n]$

$$T: y[n] = x[n - n_d]$$

$$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] = x_1[n - n_d]$$

$$x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n] = x_2[n - n_d]$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] = x[n - n_d] \Rightarrow y[n] = x_1[n - n_d] + x_2[n - n_d] = y_1[n] + y_2[n]$$

Einar
öppfikt ✓

$$D: y[n] = \log_{10} x[n] = T$$

ΔEN Einar
öppfikt.

$$x_1[n] = 1$$

$$x_2[n] = 10 = 10 \cdot x_1[n] \Rightarrow y_2[n] = 10 \cdot y_1[n]$$

$$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] = \log_{10} x_1[n] = 0$$

$$x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n] = \log_{10} x_2[n] = 1$$

ΔEN
 $10x_1[n]$
 $y_2[n] \neq 10 y_1[n]$

• Χρονική αφεξέρβητο.

$$A. \quad \begin{array}{l} x[u] \xrightarrow{T} y[u] \\ x[u-n_d] \xrightarrow{T} y[u-n_d] \end{array}$$

$$y[u] = x[Mu] : T \quad \leftarrow$$

Δεν είναι
χρον. αφεξέρβητο.

$$\begin{array}{l} x[u] \rightarrow y[u] \\ x[u-n_d] \rightarrow y[u-n_d] \end{array}$$

$$x_1[u] \xrightarrow{T} y_1[u] = x_1[Mu]$$

$$x_2[u] = x_1[u-n_0]$$

$$x_2[u] \xrightarrow{T} y_2[u] = x_2[Mu] = x_1[Mu-n_0] \quad \leftarrow \times$$

$$\rightarrow y_1[u-n_0] = x_1[M(u-n_0)] = x_1[Mu-Mu_0] \quad \leftarrow$$

$$y[u] = x[u-n_k]$$

είναι
χρον. αφεξέρβητο.

Γραμμικά & Χρονικά Ασύμμετρα Συστήματα (ΓΧΑ)

Linear and Time Invariant Systems LTI

$$\triangleright x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

Ορίστω $\delta[n] \xrightarrow{T} y[n] = h[n]$ μοναδιαία απόκριση του συστήματος

$$\triangleright \text{ΓΧΑ: } \delta[n-k] \xrightarrow{T} h[n-k]$$

Συνθήκη:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(\tau-t) d\tau$$

$$y[n] = T \{ x[n] \} = T \left\{ \sum_k x[k] \delta[n-k] \right\}$$

$$\text{ΓΧΑ: } y[n] = \sum_k x[k] T \{ \delta[n-k] \} \stackrel{\text{X.A.}}{=} \sum_k x[k] h[n-k]$$

$$\text{ΓΧΑ: } y[n] = \sum_k x[k] h[n-k]$$



• Ευστάθεια $x[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n]$

$$\text{Αν } |x[n]| \leq B_x < \infty$$

$$\text{και } |y[n]| \leq B_y < \infty$$

Αν ΓΧΑ:

$$y[n] = \sum_k h[k] x[n-k] \Rightarrow$$

$$|y[n]| = \left| \sum_k h[k] x[n-k] \right| \leq \sum_k |h[k]| |x[n-k]| \leq B_x \underbrace{\sum_k |h[k]|}_{B_y} < \infty$$

ΓΧΑ

$$\boxed{\sum_k |h[k]| < \infty}$$

Ευσταθία

• Αιτιαζόμενα: $y[n_0] = f\{x[n \leq n_0]\}$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad \text{Αιτιαζόμενα}$$

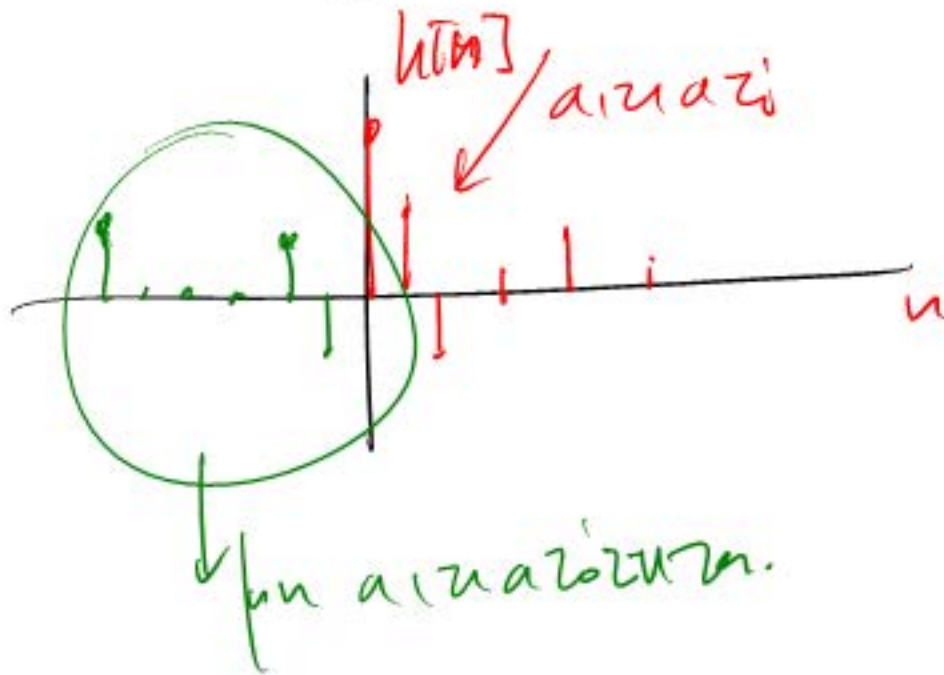
$$y[n] = x[n] - x[n+1] \quad \text{Δεν είναι αιτιαζόμενα}$$

ΓΧΑ

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \Rightarrow y[n] = \dots h[-1] x[n+1] + h[0] x[n] + h[1] x[n-1] + \dots$$

Αιτιαζουσα:

$$h[k] = 0 \quad k < 0$$



Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 21η: Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>