



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Ενότητα: Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

# Άθροισμα $N$ ημιτονοειδών όρων

Η σχέση

$$x(t) = X_0 + \Re\left\{\sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\}$$

δηλώνει ότι όταν προσθέτουμε ημιτονοειδή σήματα που σχετίζονται αρμονικά, δηλ. που περιέχουν συχνότητες οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους (βασικής) συχνότητας  $f_0$ , προκύπτει ένα σήμα περιοδικό με περίοδο:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \text{ (sec)}$$

που δεν περιγράφεται όμως όπως προηγουμένως ως ένα απλό ημίτονο, αλλά ως ένα άθροισμα ημιτονοειδών όρων.

Παράδειγμα: Εστω:

$$x_1(t) = A_1 \cos(2\pi 200t)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(2\pi 400t)$$

τότε το σήμα

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

θα είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0 = \frac{1}{200} \text{ sec}$  (Σχ. 1). Πράγματι τα σήματα  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  έχουν συχνότητες  $f_1 = 200 \text{ Hz}$  και  $f_2 = 400 \text{ Hz}$  αντίστοιχα, που είναι αρμονικά συσχετισμένες, δηλ. είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας:  $f_1 = 1 f_0$ ,  $f_2 = 2 f_0$ , όπου  $f_0 = 200 \text{ Hz}$ . Αν στα παραπάνω

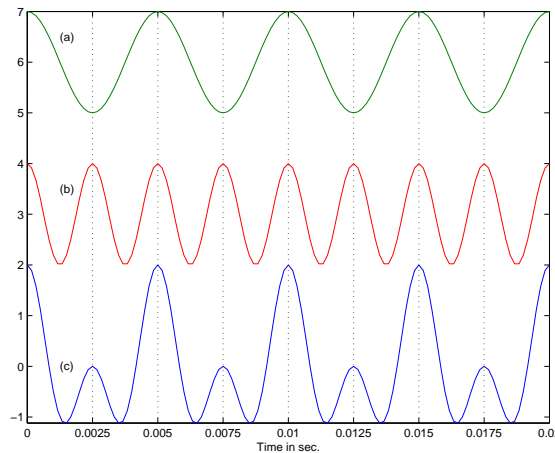


Figure 1: (a).  $x_1(t)$ , (b).  $x_2(t)$ , (c)  $x_1(t) + x_2(t)$

σήματα προσθέσουμε το σήμα  $x_3(t) = A_3 \cos(2\pi 500t)$  τότε το σήμα  $y_2(t) = y_1(t) + x_3(t)$  θα είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0 = \frac{1}{100} \text{ sec}$  (Σχ. 2) επειδή η συχνότητα  $f_0 = 100 \text{ Hz}$  είναι τώρα η μέγιστη συχνότητα που διαιρεί ακέραια όλες τις συχνότητες των σημάτων που προσθέσαμε. Σημειώστε ότι η συχνότητα  $f_0 = 100 \text{ Hz}$  είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) όλων των συχνοτήτων που προσθέσαμε. Όταν οι συχνότητες  $f_1, f_2, \dots, f_N$  των σημάτων που προσθέτουμε δεν σχετίζονται αρμονικά, τότε το άθροισμά τους δεν είναι πλέον ένα περιοδικό σήμα.

Ας δούμε το φασματικό περιεχόμενο των σημάτων που μόλις αναφέραμε

$$y_2(t) = A_1 \cos(2\pi 200t) + A_2 \cos(2\pi 400t) + A_3 \cos(2\pi 500t)$$

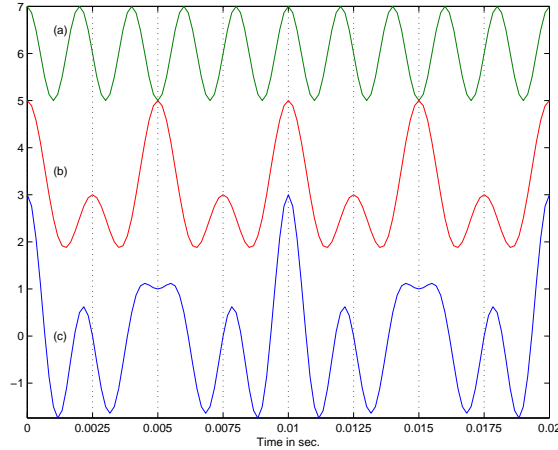


Figure 2: (a)  $x_3(t)$  (b)  $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , (c)  $y_2(t) = y_1(t) + x_3(t)$

όπου αυθαίρετα διαλέγουμε:  $A_2 < A_1 < A_3$ .

Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση Euler, το σήμα  $y_2(t)$  γράφεται ως:

$$y_2(t) = \frac{A_1}{2} (e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t}) + \frac{A_2}{2} (e^{j2\pi 400t} + e^{-j2\pi 400t}) + \frac{A_3}{2} (e^{j2\pi 500t} + e^{-j2\pi 500t})$$

και το φάσμα πλάτους φαίνεται στο σχήμα 3.

Σημειώστε ότι το φάσμα φάσης είναι για κάθε συχνότητα μηδενικό. Αν χρησιμοποιήσουμε μη μηδενικές

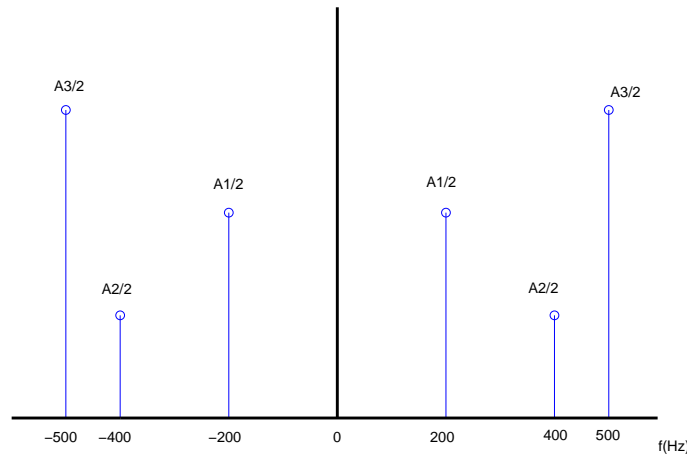


Figure 3: Φάσμα πλάτους του  $y_2(t)$ .

φάσεις π.χ.  $\phi_1 = 1.5\pi$ ,  $\phi_2 = 0.8\pi$  και  $\phi_3 = -1.1\pi$  αντίστοιχα για τα σήματα  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  και  $x_3(t)$ , τότε το νέο σήμα,  $y_3(t)$ , που θα προκύψει από την πρόσθεσή τους θα είναι επίσης περιοδικό με περίοδο  $T_0 = 1/100 \text{ sec}$  αλλά θα διαφέρει πολύ στο χρόνο από το σήμα  $y_2(t)$ . Πράγματι, στο σχήμα 4 (a) έχουμε σχεδιάσει το σήμα  $y_2(t)$  όπου τα σήματα  $x_1$ ,  $x_2$ , και  $x_3$  έχουν μηδενικές φάσεις, και στο σχήμα 4 (b) έχουμε σχεδιάσει το σήμα  $y_3(t)$  όπου τα σήματα  $x_1$ ,  $x_2$ , και  $x_3$  έχουν ΜΗ μηδενικές φάσεις. Παρατηρείστε πόσο διαφορετικά είναι στο χρόνο, αν και έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους. Επομένως, η φάση ενός σήματος είναι άρρηκτα δεμένη με τη χρονική δομή ενός σήματος.

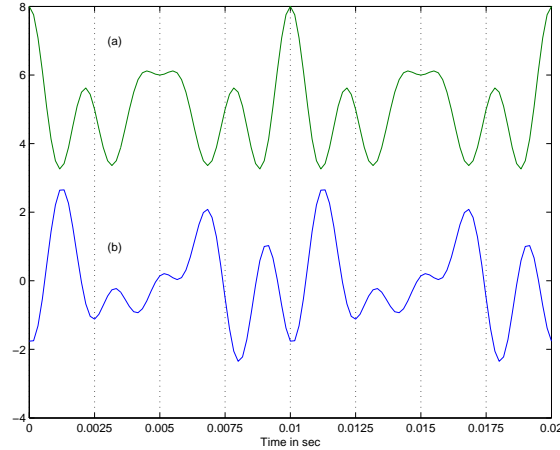


Figure 4: (a)  $y_2(t)$ : Αθροισμα σημάτων μηδενικής φάσης (b)  $y_3(t)$ : Αθροισμα των ιδίων σημάτων όπως στο (a) αλλά με φάσεις μη μηδενικές.

## Διαμόρφωση συχνότητας - Frequency Modulation (FM)

Μέχρι τώρα βλέπαμε σήματα που οι συχνότητές τους ήταν χρονικά αμετάβλητες. Σε αυτή τη παράγραφο θα δούμε σήματα των οποίων η συχνότητα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο. Τα σήματα αυτά λέγονται σήματα σειρήνας (chirp signals) και είναι μια ειδική κατηγορία σημάτων διαμορφωμένων κατά συχνότητα. Υπενθυμίζουμε τους όρους φάση και φάση μετατόπισης. Σε ένα σήμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

το όρισμα του συνημιτόνου  $\theta(t) = 2\pi f_0 t + \phi$ , ονομάζεται φάση του σήματος  $x(t)$ , ενώ  $\phi$ , ονομάζεται η φάση μετατόπισης.

Ονομάζουμε στιγμιαία συχνότητα:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Επομένως το σήμα  $x(t)$ , έχει σταθερή στιγμιαία συχνότητα:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0$$

Για γραμμικά ως προς το χρόνο μεταβαλλόμενη συχνότητα το πολυώνυμο της φάσης θα πρέπει να είναι δευτέρου βαθμού:

$$\psi(t) = 2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \phi$$

όπου  $\mu$  ονομάζεται σταθερά διαμόρφωσης. Οπότε

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 4\pi\mu t + 2\pi f_0$$

Σε κάθε χρονική στιγμή,  $t_i$ , η στιγμιαία συχνότητα θα μεταβάλλεται γραμμικά:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{d\psi(t)}{dt} \right) = 2\mu t + f_0 \quad (1)$$

Παράδειγμα: Θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα σειρήνας, του οποίου η στιγμιαία συχνότητα να μεταβάλλεται από  $f_1 = 200 \text{ Hz}$  σε  $f_2 = 2300 \text{ Hz}$  σε χρόνο  $T = 3 \text{ sec}$ .

Η στιγμιαία συχνότητα είναι:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{f_2 - f_1}{T} t + f_0 \\ &= 700t + 200 \end{aligned}$$

Η φάση του σήματος θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t 2\pi f_i(u) du \\ &= 2\pi 350 t^2 + 2\pi 200t + \phi_0 \end{aligned}$$

όπου το  $\phi_0$  είναι τυχαία σταθερά.

Όταν το φασματικό περιεχόμενο (πλάτη, φάσεις, συχνότητες) των σημάτων που αναλύουμε δεν μεταβάλλεται με το χρόνο το φάσμα πλάτους και φάσης αρκεί για να περιγράψει τα σήματα. Μια τέτοια παράσταση δεν αρκεί για τα σήματα που εξετάζουμε εδώ. Για τέτοιου είδους σήματα χρησιμοποιούμε μια παράσταση που λέγεται: Χρόνου–Συχνότητας (Time-Frequency) όπου μπορεί εύκολα να παρουσιασθεί η αλλαγή της συχνότητας ως προς το χρόνο. Σε αυτήν την παράσταση ο χρόνος είναι ο οριζόντιος άξονας και η συχνότητα ο κατακόρυφος άξονας. Η κατανομή της ενέργειας (ή της ισχύος) του σήματος αναπαριστάται σε έναν τρίτο άξονα κάθετο προς αυτούς του χρόνου και της συχνότητας. Συνήθως όμως χρησιμοποιούμε χρώματα για την αναπαράσταση της ενέργειας έχοντας αντιστοιχήσει το μαύρο χρώμα σε χαμηλή ενέργεια ενώ το κόκκινο σε υψηλή ενέργεια. Ένα παράδειγμα αναπαράστασης Χρόνου–Συχνότητας δίδεται στο σχήμα 5. Αναπαριστά το σήμα σειρήνας που μόλις δημιουργήσαμε. Στο σχήμα 6 έχουμε σχεδιάσει τα πρώτα δείγματα του σήματος αυτού στο χρόνο. Παρατηρήστε πως αλλάζει η συχνότητα του σήματος με την πάροδο του χρόνου. Για

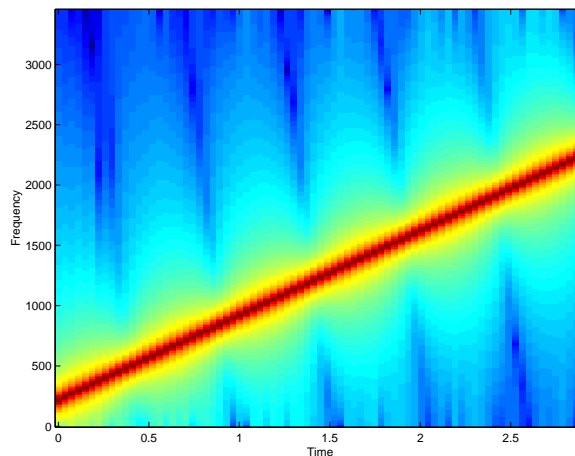


Figure 5: Αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για ένα σήμα σειρήνας με αρχική συχνότητα 200 Hz τελική 2300 Hz. Διάρκεια: 3sec.

σύγκριση, δίνουμε στο σχήμα 7 ένα ημιτονοειδές σήμα διάρκειας 3 sec με σταθερή συχνότητα 3000Hz.

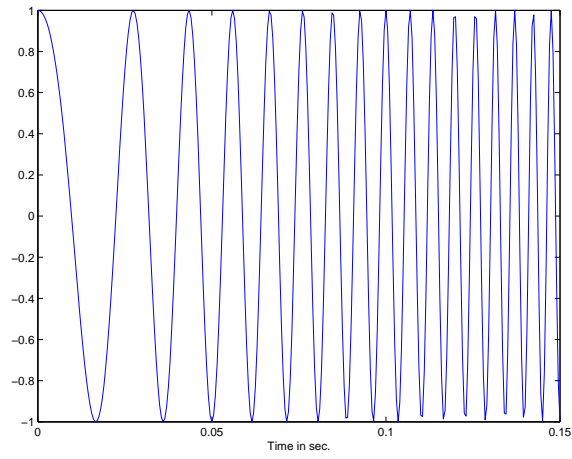


Figure 6: Ένα σήμα σειρήνας στο χρόνο.

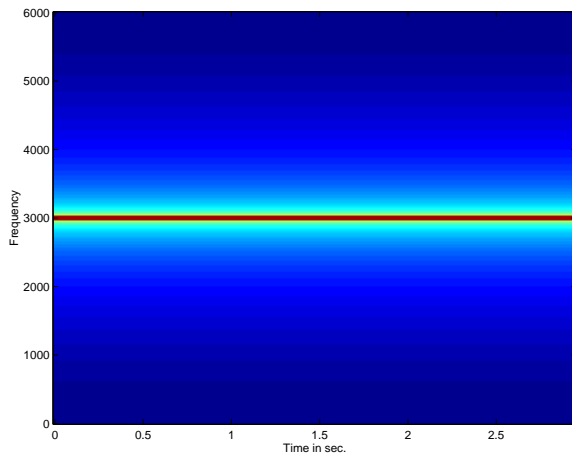


Figure 7: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας για ένα σήμα σταθερής συχνότητας  $3000Hz$ .

## Σήματα και Νότες

Ενα σήμα το οποίο μας είναι πολύ οικείο και όπου οι συχνότητες του σήματος αλλάζουν ως συνάρτηση του χρόνου είναι η μουσική. Οι νότες δεν είναι παρά ημίτονα κάποιας συχνότητας. Για παράδειγμα η νότα ΛΑ της τέταρτης οκτάβας είναι ένα ημίτονο με συχνότητα  $440\text{Hz}$  ενώ το ΝΤΟ της ίδιας οκτάβας έχει συχνότητα  $262\text{Hz}$ . Μια οκτάβα περιέχει 12 νότες: Ντο Ντο# Ρε Ρε# Μι Φα Φα# Σολ Σολ# Λα Λα# Σι, όπου # σημαίνει δίεση. Ο λόγος της συχνότητας μιας νότας προς τη συχνότητα της αμέσως προηγούμενης είναι σταθερός και ίσος με  $r$ . Για παράδειγμα:

$$\frac{f_{N\text{το}\#}}{f_{N\text{το}}} = \frac{f_{S\text{i}}}{f_{L\text{α}\#}} = r$$

Επίσης η πρώτη νότα μιας οκτάβας, με την πρώτη νότα της επομένης οκτάβας έχουν λόγο ίσο με 2. Δηλαδή είναι αρμονικές. Ας παραστήσουμε τις νότες μιας οκτάβας με:  $F_1, F_2, \dots, F_{12}$  και την πρώτη νότα της επομένης οκτάβας με  $F_{13}$ . Τότε με όσα είπαμε:

$$\frac{F_2}{F_1} = r, \frac{F_3}{F_2} = r, \dots, \frac{F_{13}}{F_{12}} = r \Rightarrow \frac{F_{13}}{F_1} = r^{12}$$

Ομως από τα παραπάνω ξέρουμε ότι:  $F_{13} = 2 F_1$ . Επομένως:

$$r^{12} = 2 \Rightarrow r = 2^{1/12} \Rightarrow r \approx 1.0595$$

Γνωρίζοντας την τιμή του  $r$  μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα σε  $\text{Hz}$  που αντιστοιχεί σε κάθε νότα αν έχουμε μία νότα ως αναφορά. Στη μουσική αυτή η νότα είναι η Λα της  $4^{\text{ης}}$  οκτάβας που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $440\text{Hz}$ . Το πιάνο έχει συνολικά 88 πλήκτρα και η νότα αναφοράς, Λα, είναι το 49 πλήκτρο, ενώ η νότα Ντο της ίδιας οκτάβας είναι το πλήκτρο 40. Γνωρίζοντας τη συχνότητα αναφοράς, η νότα Ντο της  $4^{\text{ης}}$  οκτάβας θα έχει συχνότητα:

$$f_{N\text{TO}} = f_{L\text{A}} 2^{(40-49)/12} \approx 262\text{Hz}$$

Στο σχήμα 8 φαίνονται τα πλήκτρα από το Ντο της  $3^{\text{ης}}$  οκτάβας (πλήκτρο 28) μέχρι το Σολ της  $6^{\text{ης}}$  οκτάβας (πλήκτρο 71). Επομένως, για να βρούμε τη συχνότητα μιας νότας με αριθμό πλήκτρου  $n$  δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε τη σχέση:

$$f_n = f_{L\text{A}} 2^{(n-49)/12} \quad (2)$$

όπου  $f_{L\text{A}} = 440\text{Hz}$ .

Στο σχήμα 8 εμφανίζονται επίσης οι αξίες μιας νότας. Αυτές καθορίζουν τη διάρκεια του ήχου. Για παράδειγμα, αν εμείς θελήσουμε κάθε τέταρτο νότας ( $1/4$ ) να είναι διάρκειας  $600\text{msec}$ , τότε η ολόκληρη νότα θα είναι  $4 \times 600 = 2400\text{msec}$  και κάθε όγδοο ( $1/8$ ) θα είναι:  $600/2 = 300\text{msec}$ .

Το σχήμα 9 δείχνει την αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας για τις νότες: Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, της  $4^{\text{ης}}$  οκτάβας, κάθε νότα έχει αξία  $1/4$  και διάρκεια  $600\text{msec}$ .

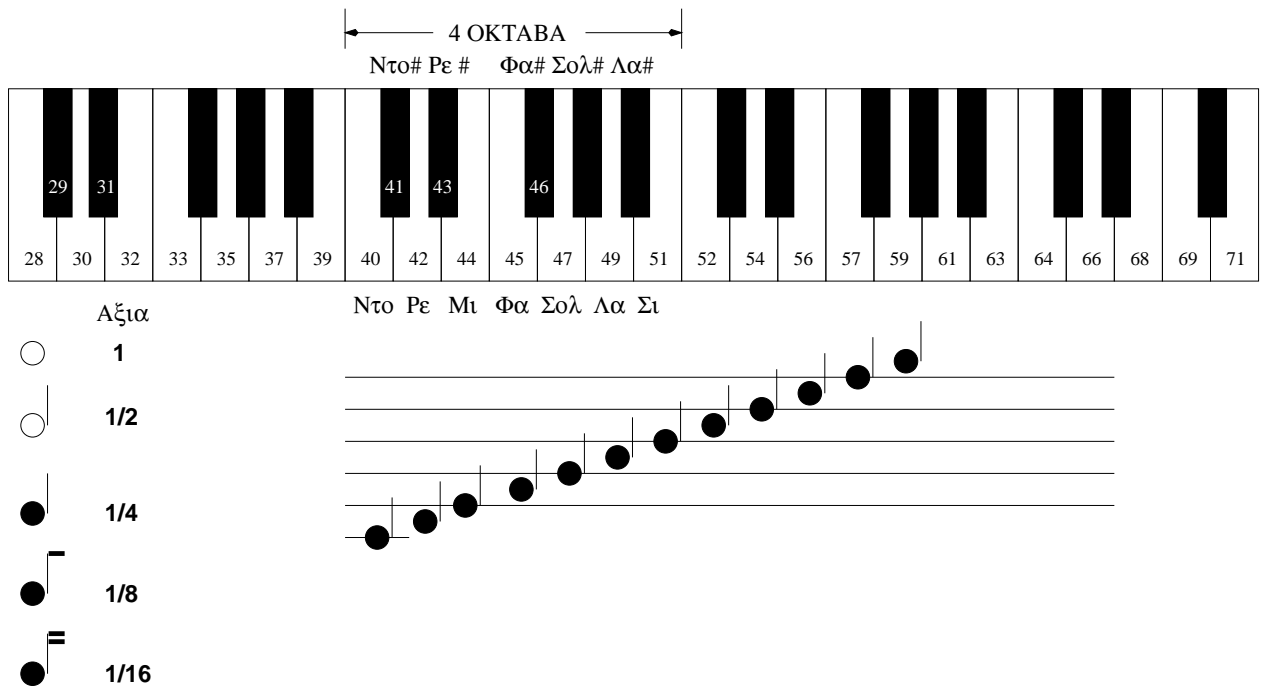


Figure 8: Κάποια πλήκτρα πιάνου, πεντάγραμμο και αξίες.

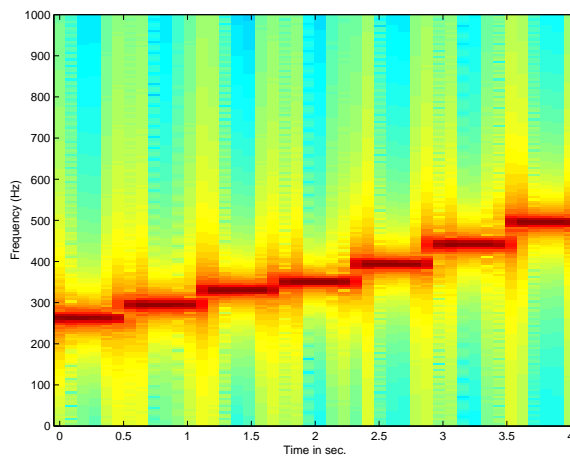


Figure 9: Αναπαράσταση Χρόνου–Συχνότητας για τις νότες: Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, της 4<sup>ης</sup> οκτάβας.



# Σειρές Fourier

Εχουμε δει ότι:

$$x(t) = 10 + 5 \cos(2\pi 10t + \pi/3) \quad (3)$$

γράφεται ως:

$$x(t) = 10 + \frac{5}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi 10t} + \frac{5}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi 10t} \quad (4)$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Το  $x(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10} \text{sec}$ . Αν θέσουμε  $X_0 = 10$  και  $X_1 = 5e^{j\frac{\pi}{3}}$ , τότε η εξίσωση 4 γράφεται ως:

$$x(t) = X_0 + \frac{X_1}{2} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} + \frac{X_1^*}{2} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} \quad (5)$$

όπου  $X_1^*$  είναι ο συζυγής του  $X_1$ . Σκοπός μας είναι να βρούμε μια σχέση που συνδέει τα μιγαδικά πλάτη  $X_0$  και  $X_1$  με το σήμα  $x(t)$ .

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (5) με  $e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t}$ , και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη σε διάστημα μιας περιόδου,  $T_0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt &= X_0 \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 + \frac{X_1}{2} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_{T_0} + \frac{X_1^*}{2} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 \\ &= \frac{X_1}{2} T_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Οπότε:

$$X_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt \quad (7)$$

Στην εξίσωση (6) κάναμε χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας:

$$\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}(k-l)t} dt = \begin{cases} T_0 & \text{αν } k = l \\ 0 & \text{αν } k \neq l \end{cases} \quad (8)$$

Για τον υπολογισμό του  $X_0$  απλά ολοκληρώνουμε το σήμα σε διάστημα μιας περιόδου:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t) dt &= X_0 \underbrace{\int_0^{T_0} dt}_{T_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 + \frac{X_1^*}{2} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 \\ &= X_0 T_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Επομένως:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (10)$$

δηλαδή το  $X_0$  είναι ίσο με τη μέση τιμή του σήματος στη διάρκεια μιας περιόδου,  $T_0$ .

Αν γράψουμε το αρχικό σήμα (εξίσωση (3)) σε μια πιο γενική μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) \\ x(t) &= A_0 + \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} \end{aligned} \quad (11)$$

τότε:

$$\begin{aligned} A_1 e^{j\phi_1} &= X_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} dt \text{ και} \\ A_0 &= X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

όπου  $A_0 = 10, A_1 = 5, \phi_1 = \frac{\pi}{3}$ .

Ας δούμε τώρα τι θα υπολογίζαμε ως πλάτος σε μια συχνότητα που δεν υπάρχει στο σήμα  $x(t)$ . Για παράδειγμα, στη συχνότητα:  $f' = 2f_0 = 2\frac{1}{T_0}$ :

$$\begin{aligned} X' &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left[ A_0 \int_0^{T_0} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t} dt + \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} \int_0^{T_0} e^{j\frac{2\pi}{T_0}t} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t} dt + \frac{A_1^*}{2} e^{-j\phi_1} \int_0^{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}t} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t} dt \right] \\ &= \frac{2}{T_0} \left[ \underbrace{A_0 \int_0^{T_0} e^{-j2\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 + \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j1\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 + \frac{A_1^*}{2} e^{-j\phi_1} \underbrace{\int_0^{T_0} e^{-j3\frac{2\pi}{T_0}t} dt}_0 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Συμπέρασμα:

- Αν μια συχνότητα  $f_1$  υπάρχει στο σήμα  $x(t)$ , τότε η σχέση:

$$A_1 e^{j\phi_1} = X_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi f_1 t} dt \neq 0 \quad (14)$$

δίνει το πλάτος  $A_1$  και τη φάση  $\phi_1$  του σήματος στη συχνότητα  $f_1$ .

- Αν, αντίθετα, η συχνότητα  $f_1$  δεν υπάρχει στο σήμα  $x(t)$ , τότε:

$$A_1 e^{j\phi_1} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi f_1 t} dt = 0 \quad (15)$$

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω:

Ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$  με περίοδο  $T_0$  μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα  $N$  όρων (όπου  $N$  μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο (π.χ.  $\infty$ )):

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_k\right) \quad (16)$$

όπου:

$$\begin{aligned} A_k e^{j\phi_k} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\ A_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \end{aligned} \quad (17)$$

Η σχέση (16) ονομάζεται ανάπτυγμα σε σειρά *Fourier* ή Σύνθεση *Fourier*, ενώ οι σχέσεις (17) ονομάζονται Ανάλυση *Fourier*.

Παράδειγμα: Θέλουμε να αναπτύξουμε σε σειρά *Fourier* το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases} \quad (18)$$

όπου  $T_0$  είναι η περίοδος του σήματος. Γραφικά το σήμα  $x(t)$  φαίνεται στο σχήμα 10.

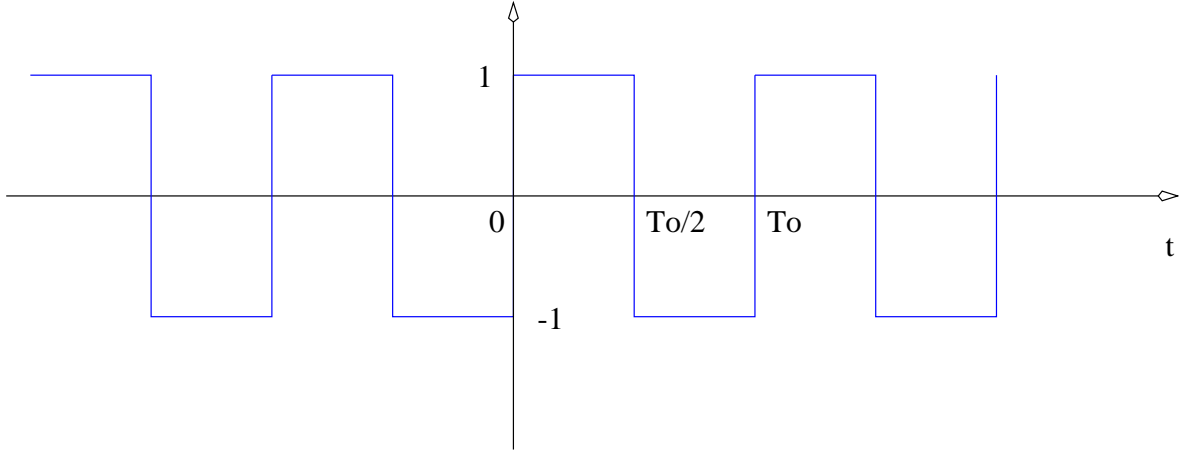


Figure 10: Το περιοδικό σήμα της Εξίσωσης (18).

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt = 0 \\ k & \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} 1 e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-1) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt \\ & \frac{2}{T_0} \frac{1}{-jk \frac{2\pi}{T_0}} e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{2}{T_0} \frac{1}{-jk \frac{2\pi}{T_0}} e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \\ & \frac{1}{j\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) + \frac{1}{j\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \\ & \frac{2}{j\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \end{aligned}$$

όμως:

$$e^{-j\pi k} = \begin{cases} -1 & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \text{ (δηλ. περιττούς)} \\ 1 & k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \text{ (δηλ. άρτιους)} \end{cases}$$

Επομένως:

$$k = \begin{cases} \frac{4}{j\pi k} & \text{για } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & \text{για } k \text{ άρτια} \end{cases}$$

ή:

$$k = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{για } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & \text{για } k \text{ άρτια} \end{cases}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{4\pi}{|k|} \quad \text{για } k \text{ περιττά} \\ \phi_k &= \begin{cases} -\pi/2 & k > 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2 + \pi = \pi/2 & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \end{aligned}$$

Αν για παράδειγμα  $T_0 = 0.04 \text{ sec}$ . τότε  $f_0 = 25 \text{ Hz}$ . Δηλαδή το φάσμα συχνοτήτων θα περιέχει μη μηδενικούς όρους στις συχνότητες:  $\pm 25 \text{ Hz}, \pm 75 \text{ Hz}, \pm 125 \text{ Hz}$ , κ.λ.π. Το φάσμα πλάτους και φάσης δίνονται στα σχήματα 11 και 12. Επομένως το  $x(t)$  μπορεί να γραφτεί ως:

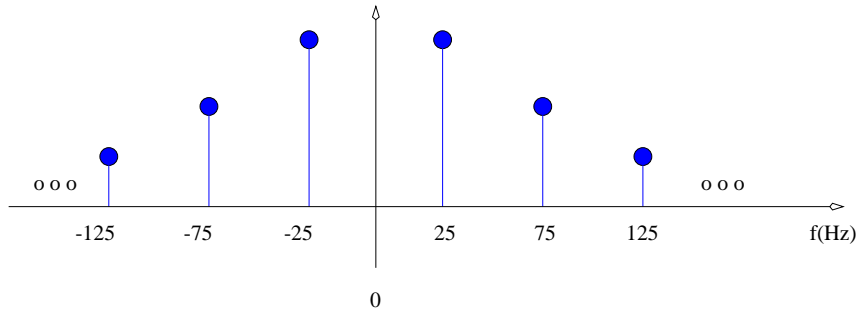


Figure 11: Φάσμα πλάτους.

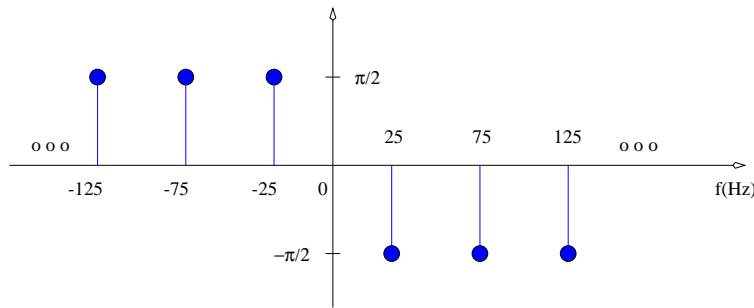


Figure 12: Φάσμα φάσης.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re \left\{ \sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jk\omega_0 t} \right\} \\
 &= \sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} \cos(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \sum_{k=2l+1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k} \sin(k\omega_0 t) \\
 &= \frac{4}{\pi} (\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots)
 \end{aligned}$$

όπου  $\Re$  σημαίνει πραγματικό μέρος,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  και  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

Στο σχήμα 13 εμφανίζουμε στο πάνω μέρος την προσέγγιση του σήματος χρησιμοποιώντας  $N = 3$  μόνο όρους από το παραπάνω άθροισμα. Στο κάτω μέρος του ίδιου σχήματος σχεδιάσαμε το προσεγγιστικό σήμα χρησιμοποιώντας  $N = 10$  όρους. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνουμε τον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούμε στη σειρά *Fourier* τόσο πιο μικρό θα είναι το λάθος προσέγγισης. Επίσης παρατηρούμε ότι το προσεγγιστικό σήμα ταλαντώνεται γύρω από τις τιμές  $1, -1$ . Αν και το πλάτος αυτών των ταλαντώσεων μικραίνουν καθώς ο αριθμός των όρων στη σειρά *Fourier* μεγαλώνει, ποτέ δεν θα εξαφανιστούν. Αυτό το φαινόμενο το μελέτησε ο *Gibbs* το 1899, και για το λόγο αυτό το φαινόμενο ονομάζεται φαινόμενο *Gibbs*.

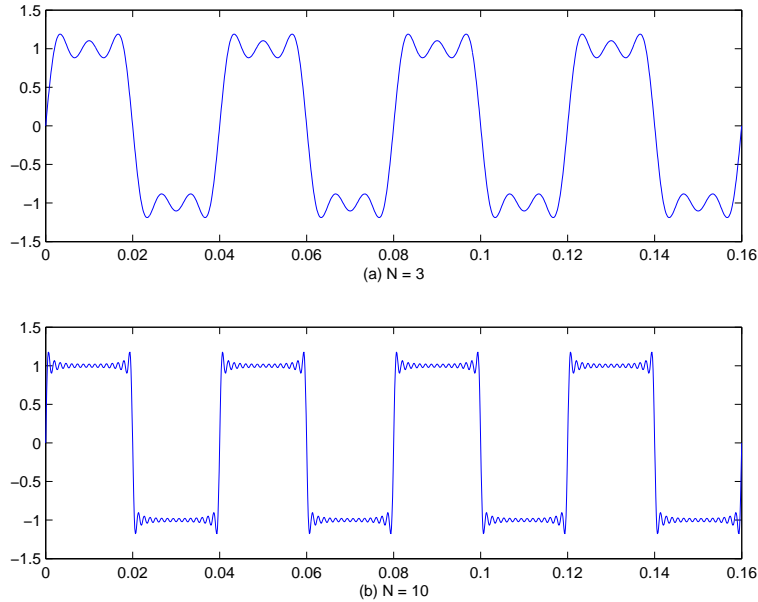


Figure 13: Πάνω: άθροισμα 3 όρων της σειράς *Fourier*. Κάτω: άθροισμα 10 όρων της σειράς *Fourier*. Παρατηρείστε το φαινόμενο *Gibbs*.

## Άρτιο και περιττό μέρος σήματος

Ένα σήμα ονομάζεται άρτιο, όταν:

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t$$

ενώ ονομάζεται περιττό όταν

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t$$

Εστω

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

το ανάπτυγμα σε *Fourier* του σήματος  $x(t)$  το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως:

$$x(t) = A_0 + \Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t}\right\} \quad (19)$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση το  $t$  αντικατασταθεί με  $-t$  έχουμε:

$$x(-t) = A_0 + \Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t}\right\} \quad (20)$$

Προσθέτωντας τις εξισώσεις (19) και (20) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του *Euler*, παίρνουμε:

$$x(t) + x(-t) = 2A_0 + 2\Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} \cos(k\omega_0 t)\right\} \quad (21)$$

Αν  $x(t)$  είναι άρτια συνάρτηση, δηλ.  $x(t) = x(-t)$ , τότε η εξίσωση (21) γράφεται:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= 2A_0 + 2\Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} \cos(k\omega_0 t)\right\} \\ x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(\phi_k) \cos(k\omega_0 t) \end{aligned} \quad (22)$$

Παρατηρούμε ότι αν  $x(-t) = -x(t)$ , δηλαδή αν το σήμα ήταν περιττό, τότε το άθροισμα στην εξίσωση (21) θα ήταν μηδέν. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν το σήμα  $x(t)$  είναι άρτιο, τότε περιέχει μόνο συνημιτονοειδής όρους (Εξίσωση (21)). Αντίθετα, ένα περιττό σήμα δεν περιέχει συνημιτονοειδής όρους. Αν αντί να προσθέσουμε τις Εξισώσεις (19) και (20) τις αφαιρέσουμε, θα προκύψει:

$$\begin{aligned} x(t) - x(-t) &= \Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})\right\} \\ &= \Re\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} 2j \sin(k\omega_0 t)\right\} \\ &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \end{aligned} \quad (23)$$

Αν  $x(t)$  είναι περιττό σήμα, τότε:  $x(-t) = -x(t)$  και η Εξίσωση (23) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \\ x(t) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t) \end{aligned} \quad (24)$$

#### Συμπέρασμα:

Ενα άρτιο σήμα περιέχει μόνο συνημιτονοειδή όρους (Εξίσωση (22)), ενώ ένα περιττό σήμα έχει μόνο ημιτονοειδή όρους (Εξίσωση (24)).

Κάθε πραγματικό σήμα  $x(t)$  μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} 2x(t) &= x(t) + x(-t) + x(t) - x(-t) \Rightarrow \\ x(t) &= \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{x_\alpha(t)} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{x_\pi(t)} \end{aligned}$$

όπου  $x_\alpha(t)$  δηλώνει το άρτιο μέρος ενός σήματος και  $x_\pi(t)$  δηλώνει το περιττό μέρος ενός σήματος.

Επομένως κάθε πραγματικό σήμα  $x(t)$  μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού μέρους:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t)$$

Από τα παραπάνω και από τις Εξισώσεις (22) και (24) προκύπτει ότι κάθε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(\phi_k) \cos(k\omega_0 t)}_{\text{άρτιο μέρος}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} -A_k \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t)}_{\text{περιττό μέρος}} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k (\cos(\phi_k) \cos(k\omega_0 t) - \sin(\phi_k) \sin(k\omega_0 t)) \Rightarrow \\ x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \quad (25)$$

η οποία είναι η σχέση που μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε ως ανάπτυγμα ενός πραγματικού περιοδικού σήματος σε σειρά *Fourier*.

Στο σχήμα 14 δείχνουμε το άρτιο και περιττό μέρος ενός σήματος

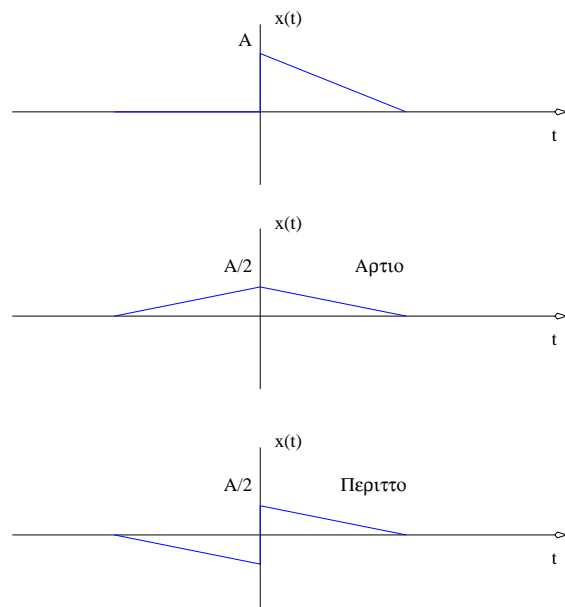


Figure 14: Αρτιο,  $x_{\alpha}(t)$ , και περιττό μέρος,  $x_{\pi}(t)$ , ενός πραγματικού σήματος  $x(t)$ .

## Θεώρημα Parseval

Εστω δύο περιοδικά πραγματικά σήματα  $x(t)$  και  $y(t)$  τα οποία αναπτύσσονται σε σειρά Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\ y(t) &= B_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \cos(m\omega_0 t + \psi_m) \end{aligned} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο σήματα ( $x(t)y(t)$ ) και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα σε μία περίοδο  $T_0$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t)y(t)dt &= A_0 B_0 \underbrace{\int_0^{T_0} dt}_{T_0} + B_0 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) dt}_0 + \\ &+ A_0 \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t + \psi_m) dt}_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_k B_m \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \cos(m\omega_0 t + \psi_m) dt \\ &= A_0 B_0 T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k B_k \int_0^{T_0} \left\{ \frac{1}{2} \cos(2k\omega_0 t + \phi_k + \psi_k) + \frac{1}{2} \cos(\phi_k - \psi_k) \right\} dt \\ &= A_0 B_0 T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k B_k \frac{1}{2} T_0 \cos(\phi_k - \psi_k) \\ \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)y(t)dt &= A_0 B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k B_k}{2} \cos(\phi_k - \psi_k) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \cos(m\omega_0 t + \psi_m) dt &= \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \frac{T_0}{2} & m = k \end{cases} \\ \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) dt &= 0 \text{ για κάθε } k \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \end{aligned}$$

Όταν  $x(t) = y(t)$  τότε

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ A_k &= B_k \\ \phi_k &= \psi_k \end{aligned}$$

για κάθε  $k$ . Έτσι η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t)dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2} \quad (2)$$



Η εξίσωση (2) είναι το περίφημο θεώρημα του Parseval το οποίο δείχνει πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στις διάφορες συχνότητες  $k\omega_0$ .

Παράδειγμα 1:

Ας αναπτύξουμε σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \sin^4(t)$$

όπου η περίοδος του σήματος είναι  $T_0 = \pi$  (γιατί:).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

και τη διωνυμική σειρά:

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

γράφουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^4(t) = \left\{ \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right\}^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{j4t} - 4e^{j3t}e^{-jt} + 6\underbrace{e^{j2t}e^{-j2t}}_1 - 4e^{jt}e^{-j3t} + e^{-j4t}) \\ &= \frac{1}{16} [(e^{j4t} + e^{-j4t}) + 6 - 4(e^{j2t} + e^{-j2t})] \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4t) + 6 - 8\cos(2t)) \\ x(t) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) \end{aligned}$$

Η ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο είναι:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^8(t) dt = 0.2734.$$

Αρα:

$$\int_0^{\pi} |x(t)|^2 dt = \pi 0.2734 = 0.8590$$

Για να δούμε πως κατανέμεται η ενέργεια αυτή σε κάθε συχνότητα του σήματος. Στη συχνότητα 0Hz (DC συνιστώσα) έχουμε ενέργεια:

$$\pi A_0^2 = \pi 0.1406 = 0.4418$$

Θεωρώντας τη βασική συχνότητα την κανονικοποιημένη συχνότητα  $\omega_0 = 1$ , βλέπουμε ότι το σήμα μας έχει τις συχνότητες:  $2\omega_0$  και  $4\omega_0$ . Στη συχνότητα  $\omega_0$  ο συντελεστής της σειράς Fourier

είναι μηδέν ( $A_1 = 0$ ) άρα δεν έχει ενέργεια το σήμα σε αυτή τη συχνότητα (ή διαφορετικά δεν περιέχει τη συχνότητα  $\omega_0$  το σήμα).

Στη συχνότητα  $2\omega_0$  ο συντελεστής της σειράς Fourier είναι μη μηδενικός άρα υπάρχει η συχνότητα  $2\omega_0$  στο σήμα και η ενέργεια που έχει κατανεμηθεί σε αυτήν είναι:

$$\pi \frac{A_2^2}{2} = \pi \frac{(1/2)^2}{2} = \pi 0.125 = 0.3927$$

Ομοια δεν έχει ενέργεια το σήμα στη συχνότητα  $3\omega_0$  ενώ στη συχνότητα  $4\omega_0$  το σήμα έχει ενέργεια:

$$\pi \frac{A_4^2}{2} = \pi \frac{(1/8)^2}{2} = \pi 0.0078 = 0.0245$$

Άλλες συνιστώσες το σήμα δεν περιέχει. Προσθέτοντας λοιπόν όλες τις παραπάνω ενέργειες στις διάφορες συχνότητες έχουμε:

$$\pi \left\{ A_0^2 + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_4^2}{2} \right\} = \pi 0.2734 = 0.8590$$

Βλέπουμε ότι είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε όταν υπολογίσαμε τη συνολική ενέργεια του σήματος.

### Παράδειγμα 2:

Σε προηγούμενο μάθημα είχαμε αναπτύξει σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

Η ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο  $T_0$  είναι:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = 1$$

και το ανάπτυγμα του σήματος σε σειρά Fourier βρήκαμε να είναι:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots)$$

Αν υπολογίσουμε με το θεώρημα του Parseval την ενέργεια που έχει κάθε συχνότητα του σήματος όπως κάναμε και στο προηγούμενο παράδειγμα θα δούμε ότι στις τρεις πρώτες περιττές συχνότητες (οι άρτιες συχνότητες δεν έχουν ενέργεια) περιέχουν συνολικά ενέργεια: 0.9496 ή 94.9 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο. Οι 10 πρώτοι περιττοί όροι περιέχουν ενέργεια 0.9816 ή 98.1 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο. Τέλος οι 1000000 (thanks matlab!!) πρώτοι περιττοί όροι περιέχουν ενέργεια 0.99999979735786 ή 99.9 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο.

## Θεώρημα Parseval για μιγαδικά σήματα

Έχουμε δει ότι ένα περιοδικό μιγαδικό <sup>1</sup> σήμα  $x(t)$  αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Εστω ένα άλλο περιοδικό μιγαδικό σήμα  $y(t)$  που έχει την ίδια περίοδο  $T_0$  με το σήμα  $x(t)$  και το οποίο αντίστοιχα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t}$$

Ακολουθούμε την ίδια πορεία όπως παραπάνω μόνο που τώρα θα πρέπει να προσέξουμε πως χρησιμοποιούμε τα μιγαδικά σήματα. Π.χ. αντί για  $y(t)$  θα χρησιμοποιήσουμε το συζυγές του:  $y^*(t)$ . Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t) y^*(t) dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_k b_m^* \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \\ &= T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^* \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της πολύ γνωστής πλέον (λέω: ΠΛΕΟΝ) σχέσης

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ T_0 & k = m \end{cases} \quad (3)$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) y^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^* \quad (4)$$

Όταν τα δύο σήματα είναι ίδια τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \quad (5)$$

Η σχέση (5) είναι το θεώρημα Parseval για μιγαδικά σήματα.

---

<sup>1</sup>Σημ: ένα μιγαδικό σήμα είναι η γενική περίπτωση του σήματος. Δηλ. ένα πραγματικό σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μιγαδικό του οποίου το φανταστικό μέρος είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier  $a_k$  παρουσιάζουν συζυγή συμμετρία ως προς τη συχνότητα 0, δηλ:  $a_k = a_{-k}^*$ . Στην περίπτωση που το σήμα δεν είναι πραγματικό τότε δεν υπάρχει η παραπάνω συμμετρία στους συντελεστές Fourier.

## Μοναδικότητα των συντελεστών Fourier

Θεωρούμε ξανά την ανάπτυξη σε μιγαδική σειρά Fourier του σήματος  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6)$$

Εστω τώρα ότι προσπαθούμε να αναπτύξουμε το ίδιο σήμα χρησιμοποιώντας την ίδια τύπου σειρά ( $e^{jk\omega_0 t}$ ) αλλά που οι συντελεστές δεν είναι απαραίτητα οι συντελεστές Fourier  $a_k$ . Θα συμβολίσουμε τους νέους συντελεστές ως  $b_k$ . Επιπλέον χρησιμοποιούμε μόνο  $2N + 1$  από τους νέους συντελεστές οπότε έχουμε μια προσέγγιση του αρχικού σήματος:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t} \quad (7)$$

Το λάθος από την προσέγγιση αυτή γράφεται ως:

$$e(t) = x(t) - x_N(t) \quad (8)$$

Θέλουμε να επιλέξουμε τους συντελεστές  $b_k$  έτσι ώστε το λάθος αυτό να είναι ελάχιστο. Συγκεκριμένα επιλέγουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e(t) e^*(t) dt \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας στην (8) τη σχέση (6) και (7) μπορούμε να γράψουμε την (8) ως:

$$e(t) = \sum_{k=-N}^N (a_k - b_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{|k|>N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (10)$$

όπου το τελευταίο άθροισμα δηλώνει όλες τις τιμές του  $k$  από  $-\infty$  έως  $\infty$  εκτός το πεδίο τιμών  $[-N : N]$ . Το λάθος  $e(t)$  προκύπτει ως άθροισμα δύο σημάτων με την ίδια περίοδο επομένως θα είναι και αυτό περιοδικό με την ίδια περίοδο. Ως περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{jk\omega_0 t} \quad (11)$$

όπου

$$g_k = \begin{cases} a_k - b_k & -N \leq k \leq N \\ a_k & |k| > N \end{cases}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval για μιγαδικά σήματα η ενέργεια του σήματος  $e(t)$  σε μία περίοδο είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g_k|^2 \\ &= \sum_{k=-N}^N |a_k - b_k|^2 + \sum_{|k|>N} |a_k|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ελάχιστο όταν

$$a_k = b_k \quad |k| \leq N$$

και τότε το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$\epsilon_{min} = \sum_{|k|>N} |a_k|^2$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ελάχιστο όταν οι συντελεστές  $b_k$  δεν είναι άλλοι παρά οι συντελεστές Fourier ( $a_k$ ).

Επομένως αν η ανάπτυξη σε σειρά Fourier ενός σήματος περιοριστεί σε  $N$  όρους, τότε αν θέλουμε να έχουμε το μικρότερο λάθος από την προσέγγιση αυτή, οι συντελεστές των όρων αυτών δεν μπορεί να είναι άλλοι από τους συντελεστές Fourier. Επιπλέον επειδή το ελάχιστο σφάλμα είναι άθροισμα θετικών αριθμών αυτό θα μειώνεται όσο το  $N$  θα αυξάνεται.

## Πράξεις με σήματα

Εστω δύο περιοδικά με την ίδια περίοδο μιγαδικά σήματα  $x(t)$  και  $y(t)$  και τα αναπτύγματα σε Fourier αυτών:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}\end{aligned}$$

- Τότε το σήμα

$$z(t) = c_1 x(t) \pm c_2 y(t)$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  σταθερές θα είναι περιοδικό με την ίδια περίοδο των  $x(t)$  και  $y(t)$  και οπότε θα έχει ανάπτυγμα Fourier:

$$\begin{aligned}z(t) &= c_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \pm c_2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_1 a_k \pm c_2 b_k) e^{jk\omega_0 t} \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k e^{jk\omega_0 t}\end{aligned}$$

Δηλαδή οι συντελεστές Fourier,  $z_k$ , του νέου σήματος δεν είναι παρά:

$$z_k = (c_1 a_k \pm c_2 b_k)$$

- Θεωρούμε το σήμα

$$z(t) = x(t) y(t)$$

το οποίο είναι και αυτό περιοδικό με την ίδια περίοδο των  $x(t)$  και  $y(t)$ .

Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Fourier των σημάτων<sup>2</sup>  $x(t)$  και  $y(t)$  γράφουμε:

$$\begin{aligned}z(t) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{jl\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} \\&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t} \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m \right] e^{jk\omega_0 t}\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Παρατηρήστε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε σήματα τότε θα χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για δείκτες στα αθροίσματα, ενώ όταν αθροίζουμε σήματα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ίδιους δείκτες.

όπου  $k = l + m$ .

Έτσι οι συντελεστές Fourier,  $z_k$ , του νέου σήματος υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$z_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Περιοδική ετεροσυσχέτιση (periodic cross-correlation)

Η περιοδική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης δύο μιγαδικών σημάτων  $x(t)$  και  $y(t)$  ορίζεται ως:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας στην (13) τα αντίστοιχα αναπτύγματα σε σειρά Fourier των σημάτων, η (13) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* e^{-jl\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} e^{jm\omega_0 \tau} \right] dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* b_l e^{jl\omega_0 \tau} + \sum_{l \neq m=-\infty}^{+\infty} a_l^* b_m e^{jm\omega_0 \tau} e^{j(m-l)\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* b_l e^{jl\omega_0 \tau} \end{aligned}$$

όπου και πάλι κάναμε χρήση της γνωστής ΠΛΕΟΝ σχέσης (3) ...

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι και η συνάρτηση της ετεροσυσχέτισης αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές  $a_l^* b_l$ , δηλαδή

$$\phi_{xy}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* b_l e^{jl\omega_0 t}$$

και επομένως η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι και αυτή περιοδική με περίοδο ίση με την περίοδο των σημάτων που συσχετίσαμε.

- Περιοδική αυτοσυσχέτιση (periodic auto-correlation)

Αν συσχετίσουμε το σήμα  $x(t)$  με τον εαυτό του τότε προκύπτει η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω, η συνάρτηση της

αυτοσυσχέτισης γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
 \phi_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* a_l e^{j\omega_0 \tau} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 e^{j\omega_0 \tau}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενική μετακίνηση του σήματος ( $\tau = 0$ ) τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης για αυτή την τιμή του  $\tau$  θα ισούται με την ενέργεια του σήματος:

$$\phi_x(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 = \|x\|^2$$

όπου  $\|\cdot\|$  συμβολίζει τη νόρμα ενός σήματος.

- Μετακίνηση ως προς τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

Αν ένα σήμα  $x(t)$  αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

τότε το μετακινημένο σήμα κατά  $t_0$ ,  $x(t - t_0)$ , θα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

όπως προκύπτει εύκολα από την προηγούμενη σχέση με απλή αντικατάσταση του  $t$  με  $t - t_0$ .

Επομένως:

$$x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k e^{-jk\omega_0 t_0}] e^{jk\omega_0 t}$$

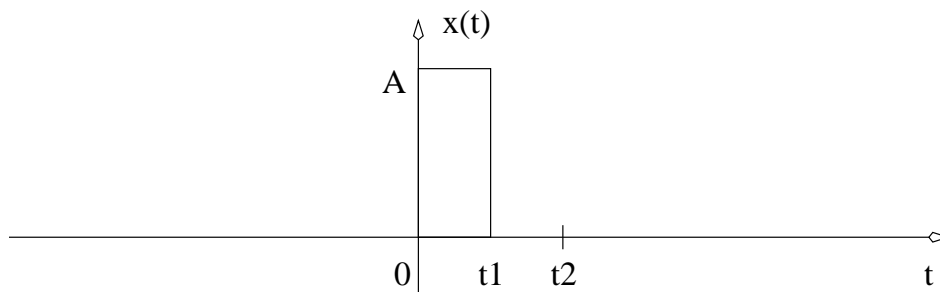


## Σήμα ΜΗ περιοδικό αλλά πεπερασμένης διάρκειας

Εστω ένα ΜΗ περιοδικό σήμα  $x(t)$  το οποίο έχει περιορισμένη διάρκεια  $t_1$

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το σήμα  $x(t)$  φαίνεται στο Σχήμα. 1 Αν θέσουμε  $t_1 = T_0/2$  και  $t_2 = T_0$  τότε μπορούμε



Σχήμα 1: Σήμα μη περιοδικό περιορισμένης διάρκειας.

να θεωρήσουμε το σήμα περιοδικό (πάλι αυτό;;;!!!! σαν εφιάλτης!!) το οποίο σε μία περίοδο γράφεται ως

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

Οπότε βέβαια μπορούμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier κατά τα γνωστά. Δηλαδή

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A T_0}{T_0 \cdot 2} = \frac{A}{2}$$

και για  $k \neq 0$

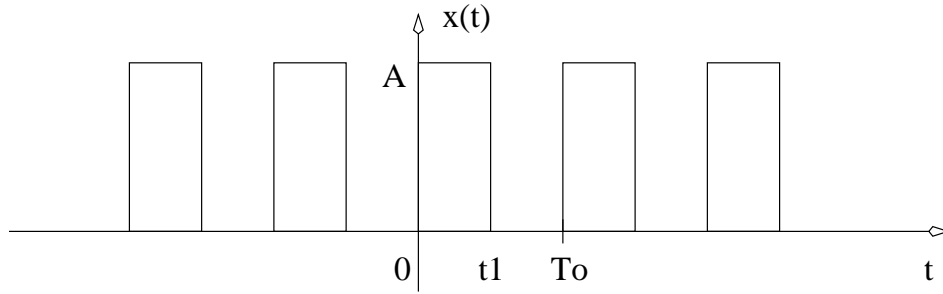
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{-A}{j2k\pi} [(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

επομένως:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{jk\pi} & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

Έτσι το σήμα γράφεται σε ανάπτυγμα Fourier ως:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$



Σχήμα 2: Το περιοδικό σήμα που αντιστοιχεί στο σήμα του Σχήματος 1

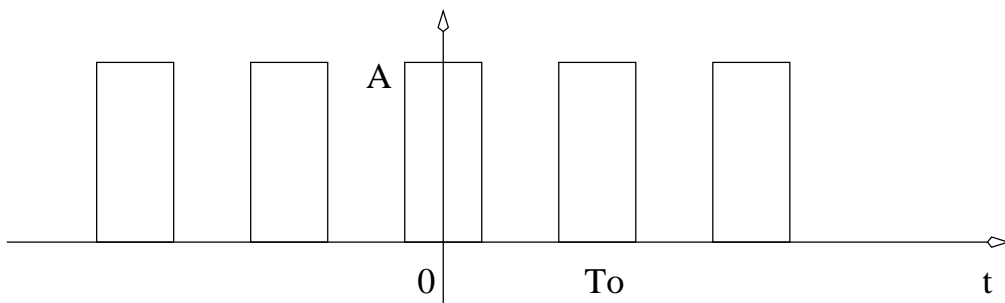
Ομως το σήμα αυτό που βρήκαμε είναι περιοδικό και μόνο σε μία περίοδο είναι ίσο με το αρχικό ΜΗ περιοδικό σήμα. Πράγματι το σήμα που εμείς αναπτύξαμε σε σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα.2 Αν μετακινήσουμε το περιοδικό ή μη περιοδικό σήμα κατά  $T_0/4$  αριστερά, δηλαδή  $x(t + T_0/4)$ , τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, το νέο σήμα θα έχει συντελεστές Fourier:

$$\begin{aligned}
 a'_k &= a_k e^{j(2k+1)\omega_0 T_0/4} \\
 &= \frac{A}{j\pi} \frac{1}{2k+1} e^{j(2k+1)\omega_0 T_0/4} \\
 &= \frac{A}{j\pi} \frac{1}{2k+1} (e^{j\pi})^k \\
 &= \frac{A}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1}
 \end{aligned}$$

επομένως

$$x\left(t + \frac{T_0}{4}\right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$

Το σήμα μετά τη μετακίνησή του αριστερά κατά  $\frac{T_0}{4}$  φαίνεται στο Σχήμα.3



Σχήμα 3: Το περιοδικό σήμα μετά τη μετακίνησή του αριστερά κατά  $\frac{T_0}{4}$

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

