ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 3
Προβολή, εσωτερικό γινόμενο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Άξονας

Ορισμός. Άξονα ονομάζουμε μία ευθεία πάνω στην οποία έχουμε επιλέξει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

Η επιλογή του $\vec{v}$ καθορίζει έναν προσανατολισμό πάνω στην ευθεία.

Συμβολίζουμε $(\varepsilon, \vec{v})$ τον άξονα που αποτελείται από την ευθεία ε προσανατολισμένη με τη φορά του διανύσματος $\vec{v}$.

Αλγεβρική τιμή διανύσματος

Ορισμός. Εάν $\vec{u}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{v}$, ονομάζουμε αλγεβρική τιμή (ή προσημασμένο μέτρο) του $\vec{u}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$ τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{u} \sim \frac{a}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$$

Παρατηρούμε ότι $|a| = |\vec{u}|$, και εάν $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, τότε

- $a > 0$ εάν $\vec{u}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$,
- $a < 0$ εάν $\vec{u}$ είναι αντίρροπο πρός το $\vec{v}$.

Την αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ συμβολίζουμε $(\overrightarrow{OB})$.

Κανόνας του Chasles

Λήμμα (Κανόνας του Chasles)

Εάν A, B, C είναι συγγραμμικά σημεία πάνω σε άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, τότε

$$(\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC})\,.$$

Προβολή διανύσματος

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Έστω ε ο φορέας του $\vec{v}$. Από το σημείο A φέρουμε κάθετο προς την ε, και έστω A' το σημείο όπου αυτή τέμνει την ε.

Ονομάζουμε (ορθογώνια) προβολή του $\boldsymbol{\vec{u}}$ στο $\boldsymbol{\vec{v}}$, και συμβολίζουμε $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(\vec{u})$, το διάνυσμα $\vec{OA'}$.

Λήμμα

Η προβολή είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό.

1. $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(\vec{u}+\vec{w}) = \mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} + \mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$
2. $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(a\,\vec{u}) = a\,\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}$

Συγκρίνοντας την προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$ του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$ με την προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \overrightarrow{OB'}$ του $\vec{v}$ στο $\vec{u}$, βλέπουμε ότι αυτές είναι, εν γένει, διαφορετικές.

Εάν όμως εξετάσουμε τις αλγεβρικές τιμές των δύο προβολών θα δούμε ότι ικανοποιούν μία απλή σχέση.

Λήμμα

Εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα με κοινό σημείο εφαρμογής στο O, ισχύει η ισότητα

$$|\vec{u}|(\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{v}) = |\vec{v}|(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}) \,. \tag{1}$$

όπου η αλγεβρική τιμή λαμβάνεται ως προς τον άξονα της προβολής.

Εσωτερικό γινόμενο

Τον πραγματικό αριθμό $|\vec{v}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$ ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο του $\vec{u}$ και του $\vec{v}$, και το συμβολίζουμε

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}).$$

Εάν ένα από τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι μηδενικό, ορίζουμε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

Πρόταση

Εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *είναι διανύσματα, με κοινό σημείο εφαρμογής στο* O, *και* $a \in \mathbb{R}$, *ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $(a\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = a\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ *και* $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Η γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB} = \vartheta$, η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Θα τη συμβολίζουμε $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Εάν έχουμε προσανατολίσει το επίπεδο, επιλέγοντας τη θετική φορά περιστροφής, τότε η γωνία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Η προσημασμένη γωνία $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ ορίζεται ως η γωνία περιστροφής ϑ, με τιμές στο διάστημα $-\pi < \vartheta \leq \pi$, που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{u}$ όταν στρέφεται στο επίπεδο για να συμπέσει με το $\vec{v}$.

Εάν $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \neq \pi$, τότε $\measuredangle(\vec{v}, \vec{u}) = -\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Συνημίτονο προσημασμένης γωνίας

Η ορθογώνια προβολή και το εσωτερικό γινόμενο συνδέονται με το συνημίτονο της προσημασμένης γωνίας με τις ακόλουθες σχέσεις

$$(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}) = |\vec{u}| \cos \measuredangle(\vec{u},\ \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \measuredangle(\vec{u},\ \vec{v})\,.$$