



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Άσκηση 2η

Στυλιανού Ιωάννης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

## 2<sup>η</sup> Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 25 Οκτωβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Έστω το διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα,  $x(t)$ :

$$x(t) = \underbrace{\{14 + 8 \sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\}}_{x_1(t)} \cos(13\pi t)$$

- Γράψτε το  $x(t)$  ως:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

όπου  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ .

Απ:  $A_1 = 4, A_2 = 14, A_3 = 4, \phi_1 = \frac{5\pi}{6}, \phi_2 = 0, \phi_3 = -\frac{5\pi}{6}$

- Σχεδιάστε το φάσμα του  $x_1(t)$  καθώς και του φέροντος σήματος:

$$x_2(t) = \cos(13\pi t)$$

- Σχεδιάστε το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος  $x(t)$

2. Ένα *chirp* σήμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x(t) = \Re\{e^{j600\pi t^2} \cos(1600\pi t)\} \quad 0 \leq t \leq 5$$

Υπολογίστε τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα χρόνου–συχνότητας.

Απ:  $f_i^1(t) = 600t + 800, f_i^2(t) = 600t - 800$

3. Αναπτύξτε σε σειρά *Fourier* το περιοδικό σήμα  $x(t)$  το οποίο σε μια περίοδο,  $T_0$ , περιγράφεται ως:

$$x(t) = \frac{A}{T_0} t \quad 0 \leq t \leq T_0$$

Απ:  $x(t) = \frac{A}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} \sin(k\omega_0 t)$  Υπενθύμιση:  $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} (x - \frac{1}{a})$

4. Ένα περιοδικό σήμα  $x(t) = x(t + T_0)$  περιγράφεται σε μια περίοδο  $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$  από την εξίσωση:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < t_c \\ 0 & t_c < |t| \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

όπου  $t_c < \frac{T_0}{2}$ .

α. Κάντε το γράφημα του  $x(t)$  για  $-2T_0 < t < 2T_0$  για την περίπτωση:  $t_c = \frac{T_0}{4}$  και  $t_c = \frac{T_0}{10}$

β. Αναπτύξτε το  $x(t)$  σε σειρά *Fourier* στις παραπάνω περιπτώσεις.

Απ:

$$t_c = \frac{T_0}{4} \quad x(t) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t)$$
$$t_c = \frac{T_0}{10} \quad x(t) = \frac{1}{5} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/5)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t)$$

γ. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και στις δύο περιπτώσεις του  $t_c$  για συχνότητες  $-10\omega_0$  έως  $10\omega_0$ , όπου  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

δ. Και τα δύο φάσματα πλάτους που σχεδιάσατε μηδενί ζονται εκατέρωθεν της μηδενικής συχνότητας π.χ. στις συχνότητες  $f_2 = -f_1$  και  $f_1$ . Εύρος ζώνης συχνοτήτων  $\Delta f$  ονομάζεται η απόσταση των δύο αυτών συχνοτήτων:  $\Delta f = f_1 - f_2 = 2f_1$ .

Εκφράζεται το εύρος ζώνης  $\Delta f$  ως συνάρτηση του λόγου  $\frac{T_0}{t_c}$ . Τι συμβαίνει στο πεδίο του χρόνου όταν ο λόγος  $\frac{T_0}{t_c}$  μεγαλώνει και τι συνέπειες έχει στο πεδίο της συχνότητας; Γράψτε τα συμπεράσματά σας και επιβεβαιώστε τα στις δύο περιπτώσεις που αναλύουμε ( $t_c = \frac{T_0}{4}$ ,  $t_c = \frac{T_0}{10}$ ).

5. Έστω το σήμα:

$$x(t) = \sin^3(27\pi t)$$

Αναπτύξτε σε σειρά *Fourier* το σήμα  $x(t)$ . Ποια είναι η περίοδος του σήματος;

$$\text{Απ: } x(t) = \frac{-1}{4} \sin(81\pi t) + \frac{3}{4} \sin(27\pi t), T_0 = \frac{2}{27}$$

6. Οι παρακάτω εντολές στο *Matlab* δημιουργούν ένα ημιτονοειδές σήμα, διάρκειας  $D = 1200msec$ , συχνότητας  $f = 200Hz$ , μηδενικής φάσης μετατόπισης και μοναδιαίου πλάτους με συχνότητα δειγματοληψίας,  $f_s = 11025Hz$

```
fs = 11025;
f=200;
D=1200;
t = 0:1/fs:D/1000;
sig = cos(2*pi*f*t);
```

Αν θέλουμε να ακούσουμε το σήμα:

```
soundsc(sig,fs);
```

Το μήκος σε δείγμα του σήματος που μόλις δημιουργήσαμε είναι:

```
Samples = D*fs/1000
```

Στον παρακάτω πίνακα σας δίνονται στην πρώτη στήλη οι πρώτες 13 νότες σε μορφή αριθμού πλήκτρου πιάνου, και δύο παύσεις (0) του έργου του *Beethoven, Für Elise*. Στη δεύτερη στήλη είναι οι διάρκειες κάθε νότας σε *msec*.

```
56 160
55 160
56 160
55 160
56 160
51 160
54 160
52 160
49 320
```

0 160  
40 160  
44 160  
49 160  
51 320  
0 160

- Υπολογίστε τη συχνότητα σε  $Hz$  κάθε νότας στον παραπάνω πίνακα. Εξαιρούνται οι παύσεις!!!!
- Με συχνότητα δειγματοληψίας  $fs = 11025$  συνθέστε όλες τις παραπάνω νότες (με μηδενική φάση μετατόπισης και μοναδιαίο πλάτος). Σημείωση: οι παύσεις δεν είναι παρά ένα μηδενικό διάνυσμα. Σώστε κάθε νότα που συνθέτετε σε μια μεταβλητή. π.χ. την πρώτη νότα στη μεταβλητή  $s1$ , τη δεύτερη νότα στη μεταβλητή  $s2$  κ.λ.π.
- Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω σήματα που συνθέσατε ( $s1, s2, s3$  κ.λ.π.) δημιουργήστε ένα μεγαλύτερο σήμα που να περικλείει όλα τα παραπάνω σήματα. π.χ. στο *Matlab* όταν θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σήμα  $s$  που να περικλείει τα σήματα  $s1, s2, s3$  γράφουμε:

```
s = [s1 s2 s3];
```

Αν το μεγαλύτερο σήμα που δημιουργήσατε το ονομάσατε *music* τότε με την εντολή

```
soundsc(music, fs);
```

θα ακούσετε τη μουσική που μόλις συνθέσατε.

Κ Α Λ Η Α Κ Ρ Ο Α Σ Η !!!

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, **Στυλιανού Ιωάννης**. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Άσκηση 2η**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

