



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Άσκηση 9η

Στυλιανού Ιωάννης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

---

# 9<sup>η</sup> Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 10 Ιανουαρίου

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

Σε αυτή τη σειρά ασκήσεων θα ασχοληθούμε με Matlab και μετασχηματισμό Fourier τόσο για σήματα που έχουμε δει σε προόδους και ασκήσεις όσο και για ένα φυσικό σήμα φωνής. Θεωρώ αυτή τη σειρά ασκήσεων πολύ σημαντική για την κατανόηση κάποιων ιδιοτήτων του Μ.Φ. αλλά και για την εφαρμογή του σε πραγματικά σήματα. Επιπλέον, η χρήση Matlab για την κατανόηση των εννοιών αυτών αποτελεί ένα παραπάνω λόγο για φοιτητές τμήματος υπολογιστών να ασχοληθούν με τις ασκήσεις αυτές.

1. Θέλουμε να επιβεβαιώσουμε την ιδιότητα

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(f/a)$$

οπου  $X(f)$  είναι ο Μ.Φ. του σήματος  $x(t)$ . Το  $X(f)$  μας δίνεται, και είναι ίσο με

$$X(f) = 2AT \operatorname{sinc}(2fT) + 3 \operatorname{sinc}(6fT) - 4 \operatorname{sinc}(8fT)$$

το οποίο σε Matlab γράφεται ως

```
X = 2*A*T*sinc(2*f*T)+3*sinc(6*f*T)-4*sinc(8*f*T);
```

Θεωρούμε  $A = 2$ ,  $T = 1$ . Θέλουμε να έχουμε 30 σημεία στη 'μονάδα' του χρόνου  $T$ , άρα  $dt = T/30$ . Επιλέγουμε αρχή και τέλος του άξονα του χρόνου να είναι αντίστοιχα  $-9T$  και  $9T$  επομένως ο άξονας του χρόνου θα είναι (σε Matlab)

```
t = -9*T:dt:9*T;
```

Παρατηρούμε ότι ο Μ.Φ. του σήματος,  $X(f)$ , αποτελείται από τρία *sinc* από τα οποία το  $\operatorname{sinc}(8fT)$  είναι αυτό που έχει τον πιο γρήγορο πρώτο μηδενισμό στη συχνότητα  $f = 1/(8T)$ . Θέλουμε να έχουμε 10 σημεία μέχρι αυτόν τον μηδενισμό. Έτσι το βήμα δειγματοληψίας για τον άξονα των συχνοτήτων είναι  $df = 1/(8T)/10$  ή  $df = 1/(80T)$ . Επειδή το φάσμα πλάτους φαίνεται να μην είναι σημαντικό μετά τη συχνότητα  $f = 1/T$  (λόγω του  $\operatorname{sinc}(2fT)$ ) δηλαδή μετά τη συχνότητα  $f = 1$  αποφασίζουμε να έχουμε ως άξονα συχνοτήτων από  $-3$  έως  $3$  (για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε αρκετή ενέργεια από το σήμα συμπεριλάβει στους υπολογισμούς μας). Δηλαδή

`df = 1/(80*T);`

`f = -3:df:3;`

Σύμφωνα με τα παραπάνω

- Με τη βοήθεια της εντολής `plot` σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης. Θα χρειαστείτε τις εντολές `abs` για το πλάτος και την εντολή `angle` για τη φάση. Π.χ. για το πλάτος

```
plot(f,abs(X)); % kanei plot to platos ws pros th syxnothta
```

- Σχεδιάστε με τη βοήθεια της εντολής `plot` το σήμα στο οποίο αντιστοιχεί το φάσμα που σας έχει δωθεί. Η σχεδίαση θα γίνει ως προς το χρόνο. Σημείωση: λόγω υπολογιστικών προσεγγίσεων το σήμα που θα λάβεται είναι γενικά ένα μιγαδικό σήμα. Με την εντολή `real` του Matlab να ‘κρατάτε’ μόνο το πραγματικό μέρος. Το φανταστικό μέρος είναι πάντα πολύ μικρό (εφόσον βέβαια το αρχικό σήμα είναι πραγματικό όπως σε αυτήν εδώ την άσκηση) επομένως μπορούμε να το αμελήσουμε.
  - Αποδείξτε ότι πράγματι το σήμα που βρήκατε με τη βοήθεια του Matlab αντιστοιχεί στο φάσμα που σας έχει δωθεί.
  - Επαναλάβετε τα παραπάνω για  $a = 0.5$  και  $a = 2$ . Ισχύει η ιδιότητα που αναφέραμε στην αρχή; Σχολιάστε.
2. Χρησιμοποιώντας τους ίδιους άξονες χρόνου και συχνότητας με την προηγούμενη άσκηση και γνωρίζοντας τον Μ.Φ.

$$X(f) = 2AT \operatorname{sinc}(2fT) - 14jAT \operatorname{sinc}(7fT) \sin(\pi fT)$$

ενός πραγματικού σήματος επιβεβαιώστε ότι

- Η ενέργεια του σήματος υπολογισμένη στο πεδίο του χρόνου είναι: 15.5964. Στο Matlab υπολογίζουμε την ενέργεια ως εξής:

```
En1 = dt*sum(real(x).^2)
```

Επομένως είναι βασικό να βρείτε πρώτα το σήμα και μετά να εφαρμόσετε την παραπάνω σχέση. Αν όλα πάνε καλά τότε θα βρείτε το παραπάνω αποτέλεσμα.

- Με τι σήμα πρέπει να πολλαπλασιάσετε το σήμα που έχετε βρεί (πάντα μιλάμε για το πραγματικό σήμα) για να μετακινηθεί το φάσμα του κατά  $\pi/2$ ; Δηλαδή για να έχουμε ένα νέο φάσμα

$$X_1(f) = X(f) \star [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

όπου  $f_0 = \pi/2$  και  $\star$  δηλώνει συνέλιξη.

Επιβεβαιώστε τα παραπάνω με Matlab (χρησιμοποιώντας *plot*).

- Χρησιμοποιώντας Matlab υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος. Σχεδιάστε την.
- Από το σήμα της αυτοσυσχέτισης που υπολογίσατε, μπορείτε να βρείτε την ενέργεια σήματος; Πόση είναι; Συμφωνεί με την παραπάνω τιμή;
- Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιώντας Matlab.

Σύμφωνα με το θεώρημα Parseval οι τρεις τιμές της ενέργειας που έχετε υπολογίσει θα πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Είναι;

- Χρησιμοποιώντας Matlab και μέσω του Μ.Φ. του σήματος μετακινήστε το σήμα στο χρόνο κατά  $2T$  μονάδες χρόνου δεξιά. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.
- Χρησιμοποιώντας Matlab και μέσω του Μ.Φ. του σήματος μετακινήστε το σήμα στο χρόνο κατά  $T$  μονάδες χρόνου αριστερά. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.
- Χρησιμοποιώντας Matlab και μέσω του Μ.Φ. του σήματος να παραγωγίσετε το σήμα στο χρόνο. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα. Υπολογίστε την παράγωγο του σήματος θεωρητικά. Συμφωνούν το θεωρητικό αποτέλεσμα και το αποτέλεσμα που υπολογίσατε με το Matlab;
- Χρησιμοποιώντας Matlab και μέσω του Μ.Φ. του σήματος να προκαλέσετε ανάκλαση του σήματος ως προς την αρχή των αξόνων του χρόνου. Δηλαδή  $x(t) \rightarrow x(-t)$ . Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

3. Σας δίνονται 501 δείγματα από ένα πραγματικό σήμα φωνής το οποίο έχει δειγματοληπτηθεί με συχνότητα  $11025 \text{ Hz}$ . Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι το σήμα της φωνής έχει σημαντική ενέργεια μέχρι τα  $8000 \text{ Hz}$ . Ομως επειδή η συχνότητα δειγματοληψίας είναι  $11025 \text{ Hz}$  δεν μπορούμε να έχουμε συχνότητες πάνω από  $11025/2 \text{ Hz}$  σύμφωνα με το

θεώρημα του Shannon. Επίσης, επειδή το σήμα είναι πραγματικό, ό,τι ενέργεια έχουμε στις αρνητικές συχνότητες την ίδια έχουμε και στις θετικές (επειδή η συνάρτηση πλάτους του Μ.Φ. ενός πραγματικού σήματος είναι άρτιο σήμα).

Τα σήμα της φωνής μπορείτε να το 'διαβάσετε' από το δίσκο μέσω της εντολής

```
[sig,fs]=wavread('politis_frame.wav');
```

Στην παραπάνω εντολή το σήμα αποθηκεύεται στο διάνυσμα *sig* ενώ η συχνότητα δειγματοληψίας στη μεταβλητή *fs*. Ο άξονας του χρόνου είναι:

```
t = 0:1/fs:500/fs;
```

άρα εδώ έχουμε  $dt = 1/fs$ . Θέλουμε μόνο τις θετικές συχνότητες του σήματος να δούμε μιας και το περιεχόμενο του σήματος στις αρνητικές συχνότητες είναι συμμετρικό με αυτό στις θετικές συχνότητες. Επίσης θέλουμε να υπολογίσουμε το ενεργειακό περιεχόμενο όχι σε όλες τις συχνότητες αλλά σε ένα περιορισμένο αριθμό συχνοτήτων. Π.χ. στις συχνότητες:  $[0\ 2\ 4\ 6\ 8\ \dots\ 4000]\text{ Hz}$ . Δηλαδή ο άξονας των συχνοτήτων είναι

```
f = 0:2:4000;
```

επομένως  $df = 2$ .

- Υπολογίστε τον Μ.Φ. του σήματος (χρησιμοποιώντας Matlab) για τις παραπάνω συχνότητες και σχεδιάστε το αποτέλεσμα (κάντε δηλ. το γράφημα) ως προς τη συχνότητα. Σε ποιες συχνότητες έχει κατανεμηθεί η περισσότερη ενέργεια του σήματος;
- Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που υπολογίσατε παραπάνω και μέσω του αντίστροφου Μ.Φ. υπολογίστε το σήμα στο χρόνο. Κάντε το γράφημα του αρχικού σήματος και πάνω σε αυτό το γράφημα με άλλο χρώμα το γράφημα του σήματος που υπολογίσατε (το οποίο περιέχει ΜΟΝΟ τις παραπάνω συχνότητες που χρησιμοποιήσατε δηλ 0, 2, 4, 6 Hz κ.λ.π.). Αν για παράδειγμα το ένα σήμα το έχετε σώσει στη μεταβλητή *s1* και το άλλο σήμα στη μεταβλητή *s2* τότε η παρακάτω εντολή θα ζωγραφίσει το πρώτο σήμα με μπλε χρώμα και το δεύτερο με πράσινο

```
plot(t,s1);hold on;plot(t,s2,'g');hold off
```

Μοιάζει το αρχικό σήμα με το σήμα που εσείς υπολογίσατε μέσω του αντίστροφου Μ.Φ.; Σημείωση: μην ξεχάσετε να πολλαπλασιάσετε το αποτέλεσμα που θα βρείτε από τον αντίστροφο Μ.Φ. με 2 για να συμπεριλάβετε έτσι και την ενέργεια που αντιστοιχεί στις αρνητικές συχνότητες.

- Επαναλάβετε τα παραπάνω αλλά έχοντας περιορίσει τώρα το εύρος στα  $2000\text{ Hz}$ . Δηλαδή

$$f = 0:2:2000;$$

- Επαναλάβετε τα παραπάνω έχοντας περιορίσει τώρα το εύρος μέχρι τη συχνότητα  $2000\text{ Hz}$  με βήμα  $10\text{ Hz}$ . Δηλαδή

$$f = 0:10:2000;$$

- Πόσο είναι η φάση και το πλάτος του σήματος στις συχνότητες

30 90 120 180 270  $\text{Hz}$

#### 4. Εθελοντική άσκηση: Παθολογική φωνή

Ηχογραφήστε τη φωνή σας όταν εκφέρετε το φώνημα 'α' για 3 δευτερόλεπτα περίπου. Χρησιμοποιείτε συχνότητα δειγματοληψίας  $11025\text{ Hz}$ , και ακρίβεια  $16\text{bits}$  (*mono*). Αναλύστε το σήμα σας από τη συχνότητα  $2000\text{ Hz}$  έως  $4000\text{ Hz}$ .

Αν το φάσμα πλάτους σε αυτές τις συχνότητες παρουσιάζει μια συμμετρία ως προς τη συχνότητα  $3000\text{ Hz}$  τότε υπάρχει μια πιθανότητα 30% να αναπτύξετε καρκίνο του φάρυγγα τα επόμενα 5 χρόνια.

Για την ανάλυση της φωνής σας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα πρώτα 300 δείγματα του σήματος σας ή ένα οποιοδήποτε άλλο κομμάτι 300 δειγμάτων από το σήμα που ηχογραφήσατε. Προτείνω να πάρετε ένα κομμάτι (*frame* στα αγγλικά) από τη μέση του σήματος.

Επειδή το παραπάνω είναι μια πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας είναι πιο σωστό να

(α') χωρίσουμε το σήμα μας σε πολλά τέτοια κομμάτια (300 δειγμάτων)

(β') να υπολογίσουμε σε κάθε κομμάτι τον Μ.Φ. και μετά το φάσμα πλάτους (χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *abs*)

(γ') να βρούμε τη μέση τιμή των φασμάτων πλάτους έτσι ώστε στο τέλος να έχουμε ΜΟΝΟ ένα φάσμα πλάτους. Χρησιμοποιήστε την εντολή *mean* του Matlab.

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία αποφεύγουμε να πάρουμε απόφαση βασισμένοι μόνο σε ένα μικρό κομμάτι φωνής και επομένως στατιστικά τα συμπεράσματά μας θα είναι πιο ευσταθή.

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, **Στυλιανού Ιωάννης**. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Άσκηση 9η». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

