



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

---

# Κβαντική Μηχανική Ι.

## Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

### Σύνολο Προβλημάτων 9

28 Νοεμβρίου 2014

**Πρόβλημα 9.1 :** Σε μια δέσμη σωματιδίων μετρούμε ταυτόχρονα το  $\vec{L}^2$  και το  $L_z$ . Η μέτρηση δίνει ζευγάρια τιμών  $\ell = m = 0$  και  $\ell = 1, m = -1$ , με πιθανότητες  $3/4$  και  $1/4$  αντίστοιχα.

(α) Βρείτε ποιά είναι η κατάσταση του συστήματος πριν την μέτρηση.

(β) Τα σωματίδια της δέσμης με  $\ell = 1, m = -1$  διαχωρίζονται και μετράται το  $L_x$  τους. Ποιες είναι οι μετρούμενες τιμές και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες;

(γ) Φτιάξτε τις χωρικές κυματοσυναρτήσεις των καταστάσεων που προέρχονται από την δεύτερη μέτρηση.

**Πρόβλημα 9.2 :** Θεωρήστε ένα σύστημα από τρία ηλεκτρόνια.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές του συνολικού σπίν. Βρείτε μια βάση ιδιοκαταστάσεων των συνολικών τελεστών του σπίν  $\vec{S}^2, S_z$ .

(β) Αγνοώντας χωρικούς βαθμούς ελευθερίας, υποθέσατε ότι η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι

$$H = a(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{2x}S_{3x} + S_{2y}S_{3y} + S_{1x}S_{3x} + S_{1y}S_{3y})$$

Δείξτε ότι η  $H$  εκφράζεται συναρτήσει των  $\vec{S}^2$  και  $S_z$ . Βρείτε τις ενεργειακές ιδιοτιμές.

**Πρόβλημα 9.3 :** Έξι ταυτόσημα σωματίδια με σπίν  $3/2$  κινούνται χωρίς να αλληλεπιδρούν μέσα σε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με ενέργεια θεμελιώδους στάθμης  $1 \text{ eV}$ . Υπολογίστε την ελάχιστη ολική ενέργεια καθώς και το μέγιστο μήκος κύματος απορρόφησης του συστήματος. Απαντήστε το ίδιο ερώτημα για 8 σωματίδια.

**Πρόβλημα 9.4:** Η χωρική κυματοσυνάρτηση ενός μονοδιάστατου συστήματος δύο ταυτόσημων σωματιδίων με σπίν  $1/2$  έχει σε μια ορισμένη στιγμή την μορφή

$$\psi(x_1, x_2) = N(x_1 - x_2)e^{-(x_1 - x_2)^2}$$

Ποιά είναι η ολική τιμή του σπίν των δύο σωματιδίων. Απαντήστε το ίδιο ερώτημα όταν:

(α) Τα σωματίδια έχουν σπίν 1.

(β) Τα σωματίδια έχουν σπίν  $3/2$ .

**Πρόβλημα 9.5 :** Βρείτε τις επιτρεπόμενες ενέργειες για  $S = 1$  και  $S = 0$  της σχετικής κίνησης ενός συστήματος δύο ταυτόσημων φερμιονίων με σπίν  $1/2$  και αλληλεπιδρούν με ένα ελκτικό δυναμικό Coulomb της μορφής

$$V(r) = -\frac{g}{r}, \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

Ποια θα είναι ειδικότερα, η ελάχιστη επιτρεπόμενη ενέργεια σε κάθε περίπτωση;

**Πρόβλημα 9.6 :** Δίνονται δύο ταυτόσημα σωματίδια μάζας  $m$  και σπίν  $1/2$  και αλληλεπιδρούν με ένα δυναμικό της μορφής

$$V = -\frac{g (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (1)$$

όπου η σταθερά σύζευξης  $g$  είναι ένας δεδομένος θετικός αριθμός.

(α) Υπολογίστε (συναρτήσει των  $\hbar$ ,  $m$  και  $g$ ) το έργο ιονισμού ( $W_I$ ) και την ελάχιστη ενέργεια διέγερσης ( $\Delta E_{min}$ ) του συστήματος που μπορεί να σχηματιστεί από δύο ταυτόσημα σωματίδια όπως τα παραπάνω λόγω της συγκεκριμένης αλληλεπίδρασης. Δείξτε ότι

$$W_I = -\frac{\epsilon}{256}, \quad \Delta E_{min} = \frac{5\epsilon}{2304}, \quad \epsilon = \frac{mg^2}{\hbar^2}.$$

(β) Δώστε τον γενικό τύπο για τις ενεργειακές στάθμες αυτού του συστήματος καθώς και τον εκφυλισμό των τριών πρώτων από αυτές. Ποιοι είναι οι καλοί κβαντικοί αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις ιδιοκαταστάσεις του και ειδικότερα την θεμελιώδη; Υπάρχει εκφυλισμός σε αυτήν την κατάσταση;

(γ) Απαντήστε τα ίδια ερωτήματα για τα ίδια σωματίδια αλλά για  $g \rightarrow -g$  στην (1).

(δ) Τι γίνεται όταν τα δύο σωματίδια έχουν σπίν 1 το καθένα; Μπορείτε να επαναλάβετε την λύση του προβλήματος και για τα δύο πρόσημα στην (1);

**Πρόβλημα 9.7 :** Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους  $L$ , και μέσα βάλτε  $2N$  ανεξάρτητα, ταυτόσημα, μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια.

(α) Υπολογίστε σε κλειστή μορφή συναρτήσει του  $N$  την ελάχιστη ολική ενέργεια του συστήματος αν τα σωματίδια έχουν ι) σπίν 0. ii) σπίν  $1/2$ .

(β) Απλοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα σας για σπίν  $1/2$  δεχόμενοι ότι ο αριθμός των σωματιδίων του συστήματος είναι πολύ μεγάλος ( $N \gg 1$ ), και υπολογίστε την μέση ενέργεια ανά σωματίδιο.

(γ) Υπολογίστε την δύναμη που ασκούν τα σωματίδια στο τοίχωμα του δυναμικού στις περιπτώσεις (i) και (ii) πιο πάνω.

**Πρόβλημα 9.8 :** Θεωρείστε ένα ζευγάρι ταυτόσημων σωματιδίων με μάζα  $m$ . Υποθέσατε ότι κινούνται σε μια διάσταση και ότι μπορούμε να αγνοήσουμε την δυναμική των σπίν τους. Το

κάθε σωματίδιο περιγράφεται από μια πραγματική κυματοσυνάρτηση που είναι συγκεντρωμένες γύρω από τα σημεία  $a$  και  $-a$  αντίστοιχα. Συγκεκριμένα δίνεται ότι

$$\psi_{\pm}(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x \mp a)^2\right]$$

Η κατάσταση είναι καλά εντοπισμένη αν  $\beta \gg \frac{1}{a^2}$ . Γράψτε την συνολική κυματοσυνάρτηση του συστήματος και υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας. Δείξτε ότι αν τα δύο σωματάρια είναι φερμιόνια τότε υπάρχει μια ενεργή άπωση μεταξύ τους. Συγκρίνετε με την περίπτωση δύο ταυτόσημων μποζονίων.

**Πρόβλημα 9.9** (ΓΙΑ ΑΠΑΙΤΗΤΙΚΟΥΣ) Θεωρήστε ένα φορτισμένο σωματάριο με σπίν 0, μάζα  $m$  και ηλεκτρικό φορτίο  $e$  που βρίσκεται σε ομογενές και σταθερό μαγνητικό πεδίο  $B$ , κάθετο στο επίπεδο  $x - y$ .

(α) Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή που περιγράφει την δυναμική αυτού το σωματιδίου είναι η

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \omega L_z + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \quad , \quad \omega \equiv \frac{eB}{2mc} \quad , \quad L_z = i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \quad (2) \quad \boxed{1}$$

(β) Μελετώντας το αντίστοιχο κλασσικό πρόβλημα, μπορείτε να συμπεράνετε σε τί αντιστοιχεί η κυκλική συχνότητα  $\omega = \frac{eB}{2mc}$ , που εμφανίζεται την χαμιλτονιανή (2);

(γ) Η χαμιλτονιανή (2) είναι ενός σωματιδίου που στην κατεύθυνση είναι ελεύθερο ενώ στο επίπεδο  $x - y$  είναι σαν τον δισδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή, μόνο που τώρα υπάρχει και ο όρος  $\omega L_z$ . Δείξτε ότι η στροφορμή  $L_z$  είναι διατηρούμενο μέγεθος.

(δ) Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε από τον αρμονικό ταλαντωτή και την στροφορμή για να διαγωνιοποιήσετε την Χαμιλτονιανή και να βρείτε τις ιδιοτιμές της και τις ιδιοσυναρτήσεις.

(ε) Είναι η ομοτιμία στο επίπεδο ( $P : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ ), συμμετρία του προβλήματος; Ποιες είναι ιδιοτιμές ομοτιμίας των ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων;

# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

