MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 1

Γεωμετρικά διανύσματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Γεωμετρικά διανύσματα

Ένα γεωμετρικό διάνυσμα είναι ένα βέλος, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα αρχή και το άλλο πέρας.

Θεωρούμε επίσης μηδενικά διανύσματα, στα οποία η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.

Χρησιμοποιούμε γράμματα του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με βέλος για να συμβολίσουμε διανύσματα: $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Διανύσματα στο επίπεδο

Θα εξετάσουμε γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο, δηλαδή βέλη που εφάπτονται στην επιφάνεια ενός επιπέδου.

Το σημείο του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται η αρχή του διανύσματος το ονομάζουμε σημείο εφαρμογής του διανύσματος.

Τα γεωμετρικά διανύσματα ονομάζονται επίσης εφαρμοστά διανύσματα, ή εφαπτόμενα διανύσματα.

Εάν η αρχή του γεωμετρικού διανύσματος $\vec{u}$ βρίσκεται στο σημείο A και το πέρας του βρίσκεται στο σημείο B του επιπέδου, συμβολίζουμε εναλλακτικά το διάνυσμα με $\overrightarrow{AB}$.

Μηδενικά διανύσματα

Το μηδενικό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το A, το συμβολίζουμε $\overrightarrow{AA}$.

Προσέξτε ότι έχουμε ένα διαφορετικό μηδενικό γεωμετρικό διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου.

Μέτρο διανύσματος

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε μέτρο (ή μήκος) του διανύσματος $\vec{u}$ την απόσταση μεταξύ των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το μέτρο του $\vec{u}$ συμβολίζεται $|\vec{u}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= |AB| \\ &= \text{απόσταση από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$

Φορέας διανύσματος

Εάν $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε η μοναδική ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\vec{u}$ ονομάζεται φορέας του $\vec{u}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του.

Παράλληλα διανύσματα

Δύο διανύσματα που έχουν το ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, ονομάζονται παράλληλα ή συγγραμμικά.

Παρατηρούμε ότι ένα μηδενικό διάνυσμα είναι παράλληλο προς οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου. Όταν δύο διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι παράλληλα λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση και γράφουμε $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Παραλληλόγραμμα

Ορισμός. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA ονομάζεται παραλληλόγραμμο εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD. Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$.

Αυτός ο ορισμός μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ταυτοχρόνως την περίπτωση που τα διαστήματα βρίσκονται σε διαφορετικές παράλληλες ευθείες (γνήσιο παραλληλόγραμμο) καθώς και τις εκφυλισμένες περιπτώσεις όπου τα τέσσερα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Τα σύμβολα $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $DCBA$, $CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD.

Παρατηρήστε οτι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν τα $A = B$ και $C = D$.

Από αυτόν τον ορισμό μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση

Εάν τα σχήματα $ABCD$ και $CDEF$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε παραλληλόγραμμο είναι και το σχήμα $ABFE$.

Παράλληλη μεταφορά

Τα γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο μπορούμε να τα μεταφέρουμε παράλληλα.
Η διαισθητική έννοια είναι ότι μετακινούμε το διάνυσμα σε ένα άλλο σημείο εφαρμογής, χωρίς να το περιστρέψουμε.

Μία σημαντική ιδιότητα των διανυσμάτων στο επίπεδο είναι οτι εάν τα μεταφέρουμε παράλληλα κατά μήκος μίας διαδρομής, και επιστρέψουμε στο αρχικό σημείο εφαρμογής, το διάνυσμα επιστρέφει στην αρχική του θέση.
Αυτό δεν ισχύει σε άλλες επιφάνειες, όπως η σφαίρα.

Ορισμός. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και ένα σημείο A' του επιπέδου. Λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{AB}$ στο A', εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

Παρατηρήστε ότι εάν το A' βρίσκεται στο φορέα του $\overrightarrow{AB}$, τότε το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ είναι εκφυλισμένο και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ έχουν τον ίδιο φορέα.

Εαν το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$ προκύπτει από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με παράλληλη μεταφορά, λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι ισοδύναμα, και γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}\,.$$

Όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Ομόρροπα διανύσματα

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα καθορίζει μία φορά, έναν προσανατολισμό, πάνω στο φορέα του: την κατεύθυνση από την αρχή προς το πέρας του διανύσματος.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ και μεταφέρουμε παράλληλα το $\overrightarrow{CD}$ στο $\overrightarrow{AD'}$.

1. Εάν το σημείο D' βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B, λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ομόρροπα, ή ότι έχουν την ίδια φορά
2. Εάν το σημείο D' δεν βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B, λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα, ή ότι έχουν αντίθετη φορά