ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 2
Πράξεις με διανύσματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Πράξεις με διανύσματα

Ο κανόνας του παραλληλόγραμμου για τη σύνθεση δύο κινήσεων ή δύο δυνάμεων είναι γνωστός από την αρχαιότητα. Δίδει μια χρήσιμη πράξη στο σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής.

Αρχικά θα ορίσουμε τις πράξεις μόνο για διανύσματα με το ίδιο σημείο εφαρμογής, (προσθέτουμε ‘ομοειδή’ αντικείμενα), ενώ αργότερα θα δούμε πώς να αποτινάξουμε αυτόν τον περιορισμό.

Θεωρούμε λοιπόν ένα σημείο O του επιπέδου, και περιοριζόμαστε σε γεωμετρικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O.

Άθροισμα διανυσμάτων

Ορισμός. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, ορίζουμε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ να είναι το γεωμετρικό διάνυσμα με αρχή στο O και πέρας στο σημείο C για το οποίο $OACB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Πολλαπλάσιο διανύσματος

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\vec{u} + \vec{u}$ έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής και την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{u}$, αλλά διπλάσιο μήκος. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή την έννοια του πολλαπλασίου, με τρόπο που να είναι συμβατός με την πράξη της πρόσθεσης.

Ορισμός. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και a είναι πραγματικός αριθμός, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε το γινόμενο $a\,\vec{u}$ να είναι το διάνυσμα με σημείο εφαρμογής O, μήκος $|a|\,|\vec{u}|$ και την ίδια διεύθυνση με το $\vec{u}$ ($|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a).

Η φορά του $a\vec{u}$ είναι η ίδια με αυτήν του $\vec{u}$ εάν $a > 0$, και η αντίθετη εάν $a < 0$.

Ιδιότητες πράξεων

Η ακόλουθη πρόταση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε.

Πρόταση

Θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ με σημείο εφαρμογής το O, και τους αριθμούς a, $b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \overrightarrow{OO} = \vec{u}$
4. $1\,\vec{u} = \vec{u}$ *και* $0\,\vec{u} = \overrightarrow{OO}$
5. $(ab)\,\vec{u} = a\,(b\,\vec{u})$
6. $(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$
7. $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$

Αντίθετο διάνυσμα

Το διάνυσμα $(-1)\vec{u}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{u} + (-1)\vec{u} = \overrightarrow{OO}\,.$$

Ονομάζεται αντίθετο του $\vec{u}$, και συμβολίζεται $-\vec{u}$.

Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό της αφαίρεσης,

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})\,.$$

Συμβατότητα με παράλληλη μεταφορά

Λήμμα

Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *και* $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$, *τότε*

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$a\,\overrightarrow{A'B'} \sim a\,\overrightarrow{AB}.$$

Πολλαπλάσια ενός διανύσματος

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια διανύσματα μπορούμε να πάρουμε όταν εφαρμόσουμε αυτές τις πράξεις σε ένα δεδομένο σύνολο διανυσμάτων.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα, εφαρμόζοντας τον πολλαπλασιασμό με αριθμό παίρνουμε υποχρεωτικά διανύσματα συγγραμμικά με το δοθέν.

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει οτι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλα τα συγγραμμικά διανύσματα.

Πρόταση

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\vec{v} = a\,\vec{u}$$

Συνευθειακά διανύσματα

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ στην ίδια ευθεία, τότε $\vec{v} = a\,\vec{u}$ και $\vec{u} + \vec{v} = (1 + a)\,\vec{u}$.

Συνεπώς όλα τα διανύσματα που παίρνουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό βρίσκονται επίσης στην ίδια ευθεία.

Μη συνευθειακά διανύσματα

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε έχουμε περισσότερες δυνατότητες.

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε κάθε διάνυσμα του επιπέδου εφαρμόζοντας τις πράξεις στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Πρόταση

Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ του επιπέδου, με αρχή στο O, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων

Εάν $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ είναι διανύσματα, με αρχή στο O, ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ένα διάνυσμα *εκφράζεται* ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ εάν μπορούμε να το κατασκευάσουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό στα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

Στην προηγούμενη Πρόταση δείξαμε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο δοθέντων μη συγγραμμικών διανυσμάτων.

Γραμμική εξάρτηση

Όταν εξετάζουμε μια συλλογή διανυσμάτων, συχνά μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε εάν κάποιο από τα διανύσματα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Εάν συμβαίνει αυτό, θεωρούμε ότι η συλλογή περιέχει, με κάποια έννοια, περιττά στοιχεία. Αυτή την έννοια αποκαλούμε γραμμική εξάρτηση.

Γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα

Ορισμός. Λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, με αρχή στο O, είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν κάποιο από αυτά μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Δηλαδή εάν υπάρχει κάποιο i, με $1 \leq i \leq n$, και πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{u}_i = a_1\vec{u}_1 + \ldots + a_{i-1}\vec{u}_{i-1} + a_{i+1}\vec{u}_{i+1} + \ldots + a_n\vec{u}_n\,.$$

Εάν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα μόνον όταν έχουμε περισσότερα από ένα διανύσματα στη συλλογή. Συπληρώνουμε τον ορισμό για την περίπτωση ενός διανύσματος, λέγοντας ότι το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν είναι μηδενικό, και γραμμικά ανεξάρτητο εάν δεν είναι μηδενικό.

Έχουμε δείξει οτι κάθε συλλογή που περιέχει δύο συγγραμμικά διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένη, και κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από δύο διανύσματα στο ίδιο επίπεδο είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παρατηρούμε οτι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και κάθε άλλο διάνυσμα του επιπέδου με αρχή στο O μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων. Ένα ζεύγος διανυσμάτων με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται βάση των διανυσμάτων του επιπέδου με αρχή στο O.