ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα
Διάλεξη 4
Συντεταγμένες

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Σύστημα αναφοράς

Ορισμός. Θεωρούμε το επίπεδο E^2, ένα σταθερό σημείο O και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ προσδιορίζουν δύο άξονες, $(\varepsilon, \vec{u})$ και $(\zeta, \vec{v})$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο O.

Το διατεταγμένο ζεύγος αξόνων $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$ ονομάζεται σύστημα αναφοράς και θα το συμβολίζουμε με $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Λέμε οτι το σημείο O είναι το σημείο αναφοράς ή η αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς.

Συντεταγμένες

Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα με σημείο εφαρμογής στο O, μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό

$$\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}.$$

Ορισμός. Οι αριθμοί του διατεταγμένου ζεύγους (a, b) ονομάζονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Τα διανύσματα $a\,\vec{u}$, $b\,\vec{v}$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Για κάθε σημείο C του επιπέδου, ονομάζουμε συντεταγμένες του σημείου C τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{OC}$.
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$ ονομάζεται διάνυσμα θέσης (ή διανυσματική ακτίνα) του σημείου C ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Ταύτιση του E^2 με το $\mathbb{R}^2$

Η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο μας δίδει τη δυνατότητα να αντιστοιχίσουμε τα σημεία του επιπέδου, αμφιμονοσήμαντα, με τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Προσδιορίζει, δηλαδή, μία αντιστοιχία από το επίπεδο E^2 στο σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Σε αυτήν την αντιστοιχία βασίζεται η Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία χρησιμοποιεί αλγεβρικές μεθόδους στη μελέτη του επιπέδου και του χώρου.

Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε ορθογώνια συστήματα αναφοράς, δηλαδή αυτά στα οποία οι δύο άξονες τέμνονται σε ορθή γωνία.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ με τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα,

$$\vec{i} = \frac{1}{|\vec{u}|}\,\vec{u}\,, \qquad \vec{j} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}\,.$$

Ένα σύστημα αναφοράς με ορθογώνιους άξονες και μοναδιαία διανύσματα ονομάζεται ορθοκανονικό.

Συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει οτι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς σχετίζονται με το εσωτερικό γινόμενο.

Λήμμα

Έστω $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Τότε οι συντεταγμένες (a, b) ενός διανύσματος $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{w}$ με τα αντίστοιχα διανύσματα του συστήματος αναφοράς:

$$a = \vec{w} \cdot \vec{i}, \qquad b = \vec{w} \cdot \vec{j}$$

Συντεταγμένες και πράξεις

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ με σημείο εφαρμογής στο O και συντεταγμένες (u_1, u_2), (v_1, v_2) αντίστοιχα

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}, \qquad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}.$$

Τότε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ έχει συντεταγμένες $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, δηλαδή

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j}.$$

Εάν $a \in \mathbb{R}$, το γινόμενο $a\,\vec{u}$ έχει συντεταγμένες (au_1, au_2), δηλαδή

$$a\,\vec{u} = au_1 \vec{i} + au_2 \vec{j}.$$

Συντεταγμένες και εσωτερικό γινόμενο

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1\vec{i}+u_2\vec{j})\cdot(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}) \\ &= u_1v_1\vec{i}\cdot\vec{i}+u_1v_2\vec{i}\cdot\vec{j}+u_2v_1\vec{j}\cdot\vec{i}+u_2v_2\vec{j}\cdot\vec{j} \\ &= u_1v_1+u_2v_2. \end{aligned}$$

Συντεταγμένες και μέτρο

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\
&= \sqrt{(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (u_1\vec{i} + u_2\vec{j})} \\
&= \sqrt{{u_1}^2\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 u_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 u_1\vec{j} \cdot \vec{i} + {u_2}^2\vec{j} \cdot \vec{j}} \\
&= \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}.
\end{aligned}
$$