ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 5
Ελεύθερα Διανύσματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Προβλήματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής

- Μετατόπιση
- Ταχύτητα
- Δύναμη

Ελεύθερο διάνυσμα

Το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα με το $\vec{u}$, δηλαδή που προκύπτουν από το $\vec{u}$ με παράλληλη μεταφορά.

Προς το παρόν θα συμβολίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ με $[\vec{u}]$, δηλαδή

$$[\vec{u}] = \{\vec{v} \text{ διανύσμα στο επίπεδο, τέτοιο ώστε } \vec{v} \sim \vec{u}\}.$$

Το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ είναι ίσο με το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{v}$ εάν και μόνον εάν το $\vec{u}$ προκύπτει από το $\vec{v}$ με παράλληλη μετατόπιση,

$$[\vec{u}] = [\vec{v}] \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad \vec{u} \sim \vec{v}\,.$$

Πράξεις μέσω αντιπροσώπων

Για να προσθέσουμε ελεύθερα διανύσματα χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους των συνόλων, με κοινό σημείο εφαρμογής.

Θεωρούμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$. Στο σημείο O υπάρχουν ισοδύναμα διανύσματα $\overrightarrow{OA} \sim \vec{u}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \vec{v}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ για να ορίσουμε τις πράξεις μεταξύ των ελεύθερων διανυσμάτων $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$.

Πρόσθεση ελεύθερων διανυσμάτων

Προσθέτουμε τα εφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Ορίζουμε το άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ να είναι το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$,

$$\begin{aligned} [\vec{u}] + [\vec{v}] &= \left[\overrightarrow{OC}\right] \\ &= [\vec{w}]\,. \end{aligned}$$

Πρόσθεση *“καλά ορισμένη”*

Πρέπει να ελέγξουμε ότι η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι το ελεύθερο διάνυσμα που παίρνουμε ως αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους συγκεκριμένους αντιπροσώπους που επιλέξαμε, $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.
Η επαλήθευση βασίζεται στις ιδιότητες της παράλληλης μεταφοράς.

Εάν επιλέξουμε αντιπροσώπους με ένα άλλο σημείο εφαρμογής, $\overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{O'B'}$, τότε $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$.
Αλλά έχουμε δει οτι τότε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}] + [\vec{v}]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου εφαρμογής.

Άλλες πράξεις με ελεύθερα διανύσματα

Ορίζουμε το πολλαπλάσιο του ελεύθερου διανύσματος $[\vec{u}]$ με τον πραγματικό αριθμό a να είναι το ελεύθερο διάνυσμα $\left[a\,\overrightarrow{OA}\right]$,

$$\begin{aligned} a\,[\vec{u}] &= \left[a\,\overrightarrow{OA}\right] \\ &= [a\,\vec{u}]\,, \end{aligned}$$

και ελέγχουμε οτι είναι καλά ορισμένο.

Παρόμοια ορίζουμε την προβολή ελεύθερων διανυσμάτων

$$\mathrm{pr}_{[\vec{v}]}[\vec{u}] = \left[\mathrm{pr}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}\right],$$

και το εσωτερικό γινόμενο

$$[\vec{u}]\cdot[\vec{v}] = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Σε κάθε περίπτωση ελέγχουμε οτι είναι καλά ορισμένο.

Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και σημεία A, B, C, D με συντεταγμένες (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) και (d_1, d_2) αντίστοιχα.

Εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, τότε

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{και} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \tag{1}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $v_1 = b_1 - a_1$ και $v_2 = b_2 - a_2$ δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο αντιπρόσωπο $\overrightarrow{AB}$, αλλά χαρακτηρίζουν το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος $\vec{v}$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι οι αριθμοί

$$v_1 = b_1 - a_1 \quad \text{και} \quad v_2 = b_2 - a_2,$$

όπου (a_1, a_2) και (b_1, b_2) είναι οι συντεταγμένες των άκρων κάποιου αντιπροσώπου $\overrightarrow{AB}$ του $\vec{v}$.

Πρόταση

Δύο ελεύθερα διανύσματα είναι ίσα εάν και μόνον εάν οι συντεταγμένες τους είναι μία προς μία ίσες. Συνεπώς το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^2$.

Εάν $v_1 \neq 0$, ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{v}$ τον αριθμό

$$\lambda = \frac{v_2}{v_1}.$$