ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα
Διάλεξη 12
Αλλαγή συστήματος αναφοράς στο χώρο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Αλλαγή συστήματος αναφοράς στο χώρο

Θεωρούμε δύο ορθοκανονικά, δεξιόστροφα συστήματα αναφοράς στο χώρο, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου ως προς τα δύο διαφορετικά συστήματα.

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς των δύο συστημάτων είναι το ίδιο.

Εάν X είναι σημείο του χώρου, με συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$, το διάνυσμα θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{1}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες $(x',\, y',\, z')$ του X ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{OX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}\,. \tag{2}$$

Εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Έστω

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w} \\ \vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w} \\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w} \end{aligned} \tag{3}$$

Αντικαθιστούμε τις (3) στην (1) και συγκεντρώνουμε όμοιους όρους:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX} &= x(a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}) \\
&\quad + y(a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}) \\
&\quad + z(a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}) \\
&= (xa_1 + ya_2 + za_3)\vec{u} \\
&\quad + (xb_1 + yb_2 + zb_3)\vec{v} \\
&\quad + (xc_1 + yc_2 + zc_3)\vec{w}
\end{aligned}$$

Συγκρίνουμε με την (2) και έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned} \tag{4}$$

Συνημίτονα διεύθυνσης

Απομένει να εξετάσουμε πώς εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Ας εξετάσουμε πρώτα την αντίστροφη σχέση, δηλαδή πώς εκφράζουμε το $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Αφού και τα δύο συστήματα είναι ορθοκανονικά, οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{u}$ με τα τρία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}\,.$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{u}$ είναι μοναδιαία, $\vec{u} \cdot \vec{i}$ είναι απλώς το συνημίτονο της γωνίας ϑ_1 μεταξύ του $\vec{u}$ και του $\vec{i}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \vartheta_1 \, .$$

Παρόμοια, αν η γωνία μεταξύ του $\vec{j}$ και του $\vec{u}$ είναι ϑ_2 και η γωνία μεταξύ του $\vec{k}$ και του $\vec{u}$ είναι ϑ_3,

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \cos \vartheta_2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos \vartheta_3 \, .$$

Άρα έχουμε

$$\vec{u} = \cos\vartheta_1 \vec{i} + \cos\vartheta_2 \vec{j} + \cos\vartheta_3 \vec{k}\,.$$

Οι συντεταγμένες $\cos\vartheta_1$, $\cos\vartheta_2$, $\cos\vartheta_3$ ονομάζονται συνημίτονα διεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Οι συντεταγμένες του $\vec{i}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ δίδονται επίσης από τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w} \\ &= (\vec{i}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{i}\cdot\vec{v})\vec{v} + (\vec{i}\cdot\vec{w})\vec{w}\,.\end{aligned}$$

και έχουμε

$$a_1 = \vec{i}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{i} = \cos\vartheta_1\,.$$

Ανάλογα

$$a_2 = \vec{j} \cdot \vec{u} = \cos \vartheta_2 \,, \qquad a_3 = \vec{k} \cdot \vec{u} = \cos \vartheta_3 \,.$$

Δηλαδή έχουμε

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \,.$$

Παρόμοια βρίσκουμε οτι

$$\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\,,$$

όπου b_1, b_2, b_3 είναι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\vec{v}$ με τα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

και

$$\vec{w} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\,,$$

όπου c_1, c_2, c_3 είναι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\vec{w}$ με τα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Τελικά, για τα διανύσματα των δύο συστημάτων αναφοράς έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w} \\ \vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w} \\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w} \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} \vec{u} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{v} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{w} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \end{aligned}$$

Για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου X ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, έχουμε

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + b_1y' + c_1z' \\ y &= a_2x' + b_2y' + c_2z' \\ z &= a_3x' + b_3y' + c_3z' \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned}$$

Διαφορετικά σημεία αναφοράς

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα σημεία αναφοράς των δύο συστημάτων είναι διαφορετικά. Υποθέτουμε οτι τα δύο συστήματα είναι $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ και ότι

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}\,,$$

δηλαδή οι συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι (x_0, y_0, z_0).

Τότε το διάνυσμα θέσης του σημείου X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ από τις

$$\begin{aligned}\vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}\\ \vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}\\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}\end{aligned}$$

και βρίσκουμε τις συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$\begin{aligned}x' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0)\\ y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0)\\ z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)\end{aligned}$$

οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{PX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}\,.$$