MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 14
Επίπεδο στο χώρο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Παραμετρική περιγραφή επιπέδου

Θεωρούμε ένα σταθερό σύστημα αναφοράς στο χώρο, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Ένα επίπεδο καθορίζεται από 3 σημεία

$$P(x_1, y_1, z_1) \quad Q(x_2, y_2, z_2) \quad R(x_3, y_3, z_3)\,.$$

Εάν $X(x, y, z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, τότε το $\overrightarrow{PX}$ είναι γραμμικός σύνδυασμος των $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$.

Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$$

προσδιορίζει το σημείο X του επιπέδου.

Άρα η παραμετρική περιγραφή του επιπέδου είναι

$$\begin{aligned}(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1) &= s(x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)\\ &\quad + t(x_3 - x_1,\, y_3 - y_1,\, z_3 - z_1)\,,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(x,\, y,\, z) = (1 - s - t)(x_1,\, y_1,\, z_1) + s(x_2,\, y_2,\, z_2) + t(x_3,\, y_3,\, z_3)\,.$$

Αναλυτική εξίσωση επιπέδου

Για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου σκεπτόμαστε ως εξής:

Τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ βρίσκονται στο επίπεδο, άρα το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ είναι κάθετο στο επίπεδο και συνεπώς για κάθε σημείο X του επιπέδου, το μικτό γινόμενο μηδενίζεται,

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 0\,.$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \\ B &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \\ C &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

και έχουμε την εξίσωση

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

Εάν γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου, $P(x_1, y_1, z_1)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο, $\vec{n}$ με συντεταγμένες (k, ℓ, m) τότε εάν $X\,(x, y, z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι κάθετο στο $\vec{n}$ και συνεπώς

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0\,,$$

ή

$$(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1) \cdot (k, \ell, m) = 0\,,$$

δηλαδή

$$kx + \ell y + mz - (kx_1 + \ell y_1 + mz_1) = 0\,.$$

Γενική εξίσωση επιπέδου

Βλέπουμε οτι και στις δύο περιπτώσεις η αναλυτική εξίσωση είναι της μορφής

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Αυτή είναι η γενική εξίσωση επιπέδου.

Πράγματι εάν $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0\,,$$

τότε για κάθε άλλο σημείο $(x,\, y,\, z)$ που την ικανοποιεί έχουμε

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,,$$

δηλαδή το διάνυσμα $(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1)$ είναι κάθετο στο $(A,\, B,\, C)$ και συνεπώς το $(x,\, y,\, z)$ βρίσκεται στο επίπεδο που περνάει από το $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(A,\, B,\, C)$.

Επίπεδο παράλληλο στο επιπεδο Oyz

Εάν $B = C = 0$ και $A \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$x = -\frac{D}{A}$$

και παριστάνει ένα επίπεδο κάθετο στο $\vec{i}$.

Αυτό το επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο που περιέχει το σημείο O και τα διανύσματα $\vec{j}$ και $\vec{k}$, το οποίο παραδοσιακά συμβολίζουμε Oyz.

Επίπεδο παράλληλο στον άξονα Ox

Εάν $A = 0,\ BC \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$By + Cz + D = 0$$

και παριστάνει ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στο άξονα Ox.

Αυτό το επίπεδο τέμνει το επίπεδο Oyz στην ευθεία με αναλυτική περιγραφή

$$\begin{aligned} By + Cz + D &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Επίπεδο από το σημείο αναφοράς

Εάν $D = 0$, τότε η εξίσωση

$$Ax + By + Cz = 0$$

παριστάνει επίπεδο που περνάει από το O.

Σημεία τομής επιπέδου με τους άξονες

Εάν $ABCD \neq 0$, τότε το επίπεδο τέμνει τους άξονες σε τρία σημεία,

$$\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), \quad \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), \quad \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right).$$

Αντίστροφα, το επίπεδο που τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz στα α, β, γ αντίστοιχα, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$, έχει εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\,.$$