ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 15
Ευθεία στο χώρο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Παραμετρική περιγραφή ευθείας στο χώρο

Θεωρούμε ένα σταθερό σύστημα αναφοράς στο χώρο, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Μία ευθεία καθορίζεται από ένα σημείο $P(x_1, x_2, x_3)$, και ένα διάνυσμα $\vec{a} = (u, v, w)$ στη διεύθυνση της ευθείας, και έχει παραμετρική παράσταση

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + s(u, v, w) .$$

Αναλυτικές εξισώσεις ευθείας στο χώρο

Η αναλυτική μορφή προκύπτει ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων, και παριστάνει την ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

Από την παραμετρική περιγραφή έχουμε

$$su = x - x_1, \quad sv = y - y_1, \quad sw = z - z_1 .$$

Εάν $uvw \neq 0$, απαλείφουμε το s και έχουμε

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w} ,$$

που δίδει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} vx - uy - (vx_1 - uy_1) &= 0 \\ wy - vz - (wy_1 - vz_1) &= 0 . \end{aligned}$$

Εάν $w = 0$ και $uv \neq 0$, η απαλοιφή του s δίδει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} vx - uy - (vx_1 - uy_1) &= 0 \\ z - z_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Η ευθεία είναι παράλληλη στο επίπεδο Oxy.

Εξισώσεις δύο επιπέδων

Γενικότερα, θεωρούμε δύο εξισώσεις:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0\,,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0\,.$$

Εάν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια σημεία, δηλαδή τα επίπεδα συμπίπτουν.

Εάν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα: είναι και τα δύο κάθετα στο διάνυσμα

$$(A_1,\, B_1,\, C_1) = k(A_2,\, B_2,\, C_2)\,.$$

Εάν

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ή} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\,,$$

τότε τα δύο επίπεδα δεν είναι παράλληλα, και τέμνονται σε μία ευθεία.

Παραμετρική περιγραφή της τομής δύο επιπέδων

Το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας περιέχεται και στα δύο επίπεδα, άρα είναι κάθετο στα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2), δηλαδή είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα

$$\vec{a} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) .$$

Η παραμετρική παράσταση της ευθείας είναι

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) ,$$

όπου (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της ευθείας, και ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 &= -D_1 \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 &= -D_2 . \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, εάν $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$, μπορούμε να θέσουμε $z_0 = 0$ και να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1 x_0 + B_1 y_0 &= -D_1 \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 &= -D_2 \end{aligned}$$

για να βρούμε τα x_0 και y_0:

$$x_0 = \frac{-(D_1 B_2 - B_1 D_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}, \qquad y_0 = \frac{-(A_1 D_2 - D_1 A_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}.$$

Η υπόθεση $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$ σημαίνει οτι η ευθεία δεν είναι παράλληλη στο επίπεδο Oxy.