ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα
Διάλεξη 16
Σημείο από επίπεδο ή ευθεία

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Απόσταση σημείου από επίπεδο

Θεωρούμε ένα επίπεδο, με εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$, και κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$.

Εάν X_1 είναι ένα σημείο του χώρου, η απόσταση του X_1 από το επίπεδο είναι το μέτρο ενός διανύσματος με αρχή στο επίπεδο, πέρας στο σημείο X_1, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο.

Για να βρούμε ένα τέτοιο διάνυσμα, θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο X_0 του επιπέδου, και προβάλουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{X_0X_1}$ στο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$.

Ορισμός. Η προσημασμένη απόσταση του σημείου X_1 από το επίπεδο με εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ προσανατολισμένο από το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι η αλγεβρική τιμή της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_0X_1}$ στο $\vec{n}$,

$$d = \left(\mathrm{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{X_0X_1}\right).$$

Η απόσταση d είναι θετική εάν το X_1 βρίσκεται στον ημίχωρο προς τον οποίο κατευθύνεται το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$, και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Υπολογίζουμε την προσημασμένη απόσταση του X_1 από το επίπεδο:

$$
\begin{aligned}
d &= (\mathrm{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{X_0X_1}) = \frac{\overrightarrow{X_0X_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{aligned}
$$

αλλά $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, άρα

$$
d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .
$$

Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω ευθεία ε, με παραμετρική παράσταση $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX_0} + t\vec{a}$, δηλαδή

$$(x,\, y,\, z) = (x_0,\, y_0,\, z_0) + t(u,\, v,\, w)\,,$$

και σημείο X_1, με $\overrightarrow{OX_1} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση από το σημείο X_1 στην ευθεία ε, δηλαδή το μέτρο ενός διανύσματος με αρχή στην ευθεία, πέρας στο σημείο X_1, το οποίο είναι κάθετο στην ευθεία ε.

Θεωρούμε το επίπεδο Π που περιέχει το σημείο X_1 και την ευθεία ε.
Το διάνυσμα

$$\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}$$

είναι κάθετο στο επίπεδο Π.

Το διάνυσμα

$$\vec{e} = (\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}) \times \vec{a}$$

εφάπτεται στο επίπεδο Π, και ταυτόχρονα είναι κάθετο στην ευθεία ε.

Άρα η απόσταση του σημείου X_1 από την ευθεία ε είναι το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_0X_1}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{e}$.

$$\begin{aligned} d &= \left|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{X_0X_1}\right| = \left|\frac{\vec{e}\cdot\overrightarrow{X_0X_1}}{|\vec{e}|}\right| \\ &= \frac{\left|(\overrightarrow{X_0X_1}\times\vec{a})\times\vec{a}\cdot\overrightarrow{X_0X_1}\right|}{\left|(\overrightarrow{X_0X_1}\times\vec{a})\times\vec{a}\right|}. \end{aligned}$$

Αλλάζουμε τη θέση των πράξεων στον αριθμητή, ενώ για τον παρανομαστή παρατηρούμε ότι $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})|}{|\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}|\,|\vec{a}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{X_0X_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}. \end{aligned}$$