ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 17

Ασύμβατες ευθείες

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Συνεπίπεδες ευθείες

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1, ε_2 με παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_1} + t\vec{a_1} \qquad t \in \mathbb{R} \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_2} + s\vec{a_2} \qquad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Εάν οι ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{X_1X_2}$, $\vec{a_1}$ και $\vec{a_2}$ είναι συνεπίπεδα και

$$[\overrightarrow{X_1X_2},\, \vec{a_1},\, \vec{a_2}] = 0\,.$$

Ασύμβατες ευθείες

Εάν $[\overrightarrow{X_1X_2}, \vec{a_1}, \vec{a_2}] \neq 0$ οι ευθείες δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και ονομάζονται ασύμβατες.

Ασύμβατες ευθείες έχουν μοναδική κοινή κάθετο κ. Το διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{u}$ της κ είναι κάθετο στο $\vec{a_1}$ και το $\vec{a_2}$, και μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\vec{u} = \vec{a_1} \times \vec{a_2}\,.$$

Η απόσταση μεταξύ ασυμβατων ευθειών

Το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_1X_2}$ πάνω στην κοινή κάθετο $\vec{u}$ δίδει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

$$\begin{aligned} d &= |\mathrm{pr}_{\vec{a_1}\times\vec{a_2}}\ \overrightarrow{X_1X_2}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|} \\ &= \frac{|[\overrightarrow{X_1X_2},\, \vec{a_1},\, \vec{a_2}]|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}\,. \end{aligned}$$

Τα σημεία τομής της κοινής καθέτου

Για να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής T_1 και T_2 της κοινής καθέτου με τις ε_1 και ε_2, εργαζόμαστε ως εξής:

Το σημείο T_1 ανήκει στην ε_1, άρα

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OX_1} + t\,\vec{a_1}$$

και παρόμοια για το T_2 και την ε_2,

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OX_2} + s\,\vec{a_2}\,.$$

Επίσης $\overrightarrow{T_1T_2}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{a_1} \times \vec{a_2}$, και άρα

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \ell\,\vec{a_1} \times \vec{a_2}\,.$$

Αλλά $\overrightarrow{T_1 T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1}$ και αντικαθιστώντας έχουμε

$$\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1} + s\,\vec{a_2} - t\,\vec{a_1} = \ell\,\vec{a_1} \times \vec{a_2}\,.$$

Αυτό είναι ένα σύστημα 3 εξισώσεων (μία για κάθε συντεταγμένη) με αγνώστους τις 3 παραμέτρους $(s,\, t,\, \ell)$.

Λύνουμε για να προσδιορίσουμε τα t, s και εν συνεχεία τα T_1, T_2.

Παρατηρούμε οτι

$$d = |\overrightarrow{T_1 T_2}| = |\ell|\,|[\overrightarrow{X_1 X_2},\, \vec{a_1},\, \vec{a_2}]|\,.$$