MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 20

Επίλυση συστήματος 3×3 με απαλοιφή Gauss

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Τρεις εξισώσεις στο χώρο: οι γραμμές

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array} \tag{1}$$

Εξετάζουμε πρώτα κάθε γραμμή (εξίσωση).

Η πρώτη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$.

Η δεύτερη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους u- και v-άξονες στα σημεία $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ και $(0, \frac{1}{3}, 0)$ ενώ είναι παράλληλο προς τον w-άξονα.

Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Η τρίτη γραμμή παριστάνει πάλι ένα επίπεδο, που τέμνει αυτήν την ευθεία σε ένα σημείο. Οι συντεταγμένες αυτού του σημείου δίδουν τη λύση του συστήματος. Στο παράδειγμα, είναι το σημείο $(1, 1, 2)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί;

Τρεις εξισώσεις στο χώρο: οι στήλες

Εναλλακτικά, μπορούμε να δούμε το σύστημα ως μια διανυσματική εξίσωση

$$u\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές u, v και w ώστε ο συνδυασμός στα αριστερά να είναι ίσος με το διάνυσμα στα δεξιά.

Γεωμετρικά, το άθροισμα τριών διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$ είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα τρία διανύσματα.

Ετσι, εάν τα τρία διανύσματα αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, τότε υπάρχει μοναδική λύση, σε αυτήν την περίπτωση $(u, v, w) = (1, 1, 2)$.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί;

Απαλοιφή Gauss

Θα εξετάσουμε συστηματικά τα βήματα της μεθόδου της απαλοιφής Gauss στο απλό παράδειγμα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση δεν είναι 0. Αρα, εάν αφαιρέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης από όλες τις άλλες, μπορούμε να κάνουμε τους συντελεστές του u σε όλες τις εξισώσεις, εκτός από την πρώτη, ίσους με 0, δηλαδή να απαλείψουμε το u από αυτές τις εξισώσεις.

Ο πρώτος οδηγός

Συγκεκριμένα

- Δεν αλλάζουμε την πρώτη εξίσωση.
- Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.
- Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη εξίσωση από την τρίτη (δηλαδή προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη).

Ο μη μηδενικός συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται πρώτος οδηγός.

Βρήκαμε τους πολλαπλασιαστές 2 και -1 διαιρώντας τους συντελεστές του u στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση με τον πρώτο οδηγό.

Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 \end{array}$$

Τα επίπεδα που παριστάνουν η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση τέμνονται στην ίδια ευθεία στην οποία τέμνονται τα αντίστοιχα επίπεδα της 1. Τα επίπεδα που παριστάνουν η πρώτη και η τρίτη εξίσωση τέμνονται στην ίδια ευθεία στην οποία τέμνονται τα αντίστοιχα επίπεδα της 1. Άρα η λύση του νέου συστήματος είναι ίδια με τη λύση του 1.

Ο δεύτερος οδηγός

Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του v στη δεύτερη εξίσωση δεν είναι 0. Αυτός είναι ο δεύτερος οδηγός, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε το v από την τρίτη εξίσωση.

- Δεν αλλάζουμε την πρώτη εξίσωση.
- Δεν αλλάζουμε τη δεύτερη εξίσωση.
- Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Αυτό το βήμα ολοκληρώνει την απαλοιφή Gauss.

Ο τρίτος οδηγός

Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & w & = & 2 \end{array}$$

Τα επίπεδα που παριστάνουν η δεύτερη και η τρίτη εξίσωση τέμνονται στην ίδια ευθεία στην οποία τέμνονται τα αντίστοιχα επίπεδα της 1.

Άρα η λύση του νέου συστήματος είναι ίδια με τη λύση του 1.

Σε αυτό το σύστημα ο v έχει μηδενικό συντελεστή '*σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη και τη δεύτερη*'.

Ο συντελεστής του w στην τρίτη εξίσωση δεν είναι 0 και είναι ο τρίτος οδηγός.

Ανάδρομη αντικατάσταση

Είναι εύκολο να λύσουμε αυτό το σύστημα.

Από την τρίτη εξίσωση έχουμε

$$w = 2\,.$$

Αντικαθιστούμε το w στη δεύτερη εξίσωση, $-8v - 4 = -12$, άρα

$$v = 1\,.$$

Αντικαθιστούμε τα v και w στην πρώτη εξίσωση, $2u + 1 + 2 = 5$, άρα

$$u = 1\,.$$

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανάδρομη αντικατάσταση

Καταγράφουμε πιο οικονομικά τη διαδικασία της απαλοιφής χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με τους συντελεστές της εξίσωσης και τη δεξιά πλευρά:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\mathbf{8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\mathbf{8} & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί, που εμφανίζονται με παχιά στοιχεία στον πίνακα, πρέπει να μη μηδενίζονται, εφόσον θέλουμε να διαιρέσουμε με αυτούς.

Εάν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής εμφανίζεται μηδέν στη θέση ενός οδηγού, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

1. Εάν υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής σε κάποια πιο κάτω θέση στη στήλη που εξετάζουμε, τότε αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, δηλαδή εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, ώστε να φέρουμε το μη μηδενικό συντελεστή στη θέση του οδηγού.
2. Εάν όλοι οι συντελεστές στις πιο κάτω θέσεις στη στήλη που εξετάζουμε είναι μηδέν, τότε δεν μπορούμε να βρούμε πλήρες σύνολο οδηγών.
   Το σύστημα ονομάζεται ιδιόμορφο και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανάδρομη αντικατάσταση για να βρούμε μία μοναδική λύση.
   Ενα ιδιόμορφο σύστημα μπορεί να μην έχει καμία λύση, ή να έχει άπειρες λύσεις. Αυτό εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.