ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 21

Διανύσματα και πίνακες

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Τρεις εξισώσεις στο χώρο: οι στήλες

Ένας άλλος τρόπος να δούμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array} \tag{1}$$

είναι να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις στήλες.

Η διανυσματική εξίσωση

Έχουμε μια διανυσματική εξίσωση

$$u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές u, v και w ώστε ο συνδυασμός των διανυσμάτων στα αριστερά να είναι ίσος με το διάνυσμα στα δεξιά.

Γεωμετρικά, γνωρίζουμε οτι εάν τα τρία διανύσματα δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, οποιοδήποτε διάνυσμα στο χώρο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Τότε υπάρχει μοναδική λύση, σε αυτήν την περίπτωση
$(u, v, w) = (1, 1, 2)$.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί;

Διανύσματα

Θα εργαστούμε σε σύνολα $\mathbb{R}^n$, για $n \geq 0$.

Ορισμός. Ορίζουμε

$$\mathbb{R}^0 = \{0\} \text{ και } \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα ονομάζουμε διανύσματα, και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ θα το αποκαλούμε χώρο (γραμμικό χώρο ή διανυσματικό χώρο). Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Όταν $n = 2$ ή 3, μπορούμε να φανταζόμαστε τα διανύσματα ως σημεία του επιπέδου ή του χώρου, ή ως βέλη.
Σε κάθε περίπτωση, ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ είναι μία διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Συνήθως, θα παριστάνουμε τα διανύσματα ως στήλες,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ,$$

αν και για λόγους τυπογραφικής οικονομίας, καμιά φορά θα γράφουμε τις συνιστώσες του διανύσματος χωρισμένες με κόμα, οριζόντια, σε παρενθέσεις, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Πρόσθεση διανυσμάτων

Στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διανυσμάτων με n συνιστώσες, ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό.

Η πρόσθεση γίνεται συνιστώσα προς συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό, γίνεται επίσης κατά συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Γραμμικοί συνδυασμοί

Ενας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων είναι ένα άθροισμα των διανυσμάτων, πολλαπλασιασμένων με πραγματικούς αριθμούς, τους συντελεστές.

Για παράδειγμα

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix}.$$

Σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

Ενα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, μπορούμε επίσης να το θεωρήσουμε με δύο τρόπους:

- Η κάθε γραμμή-εξίσωση, παριστάνει ένα *'επίπεδο' (διάστασης* $n-1$*!)* μέσα στο $\mathbb{R}^n$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν τα n 'επίπεδα' τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.
- Η κάθε στήλη παριστάνει ένα διάνυσμα, και αναζητούμε τους συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων στην αριστερή πλευρά ώστε να είναι ίσος με το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά.

Συμβολισμός

Ο συμβολισμός των πινάκων είναι χρήσιμος για να γράφουμε εξισώσεις όπως η

$$u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Η δεξιά πλευρά είναι ένα διάνυσμα-στήλη.

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Στην αριστερή πλευρά, έχουμε τους αγνώστους, ως ένα διάνυσμα-στήλη,

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Τους 9 συντελεστές, τους γράφουμε ως ένα πίνακα, με τρεις γραμμές και τρεις στήλες,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αυτός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3 επί 3.

Η εξίσωση γράφεται συνοπτικά

$$Ax = b.$$

Πίνακες

Ορισμός. Ενας **m** επί **n** πίνακας, ή πίνακας με **m** γραμμές και **n** στήλες είναι μια διάταξη mn πραγματικών αριθμών σε m γραμμές και n στήλες, κλεισμένη σε ορθογώνιες παρενθέσεις [,].

Εάν $m = n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

Εάν $m \neq n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι παραλληλόγραμμος.

Συμβολίζουμε a_{ij} τη συνιστώσα του πίνακα που βρίσκεται στην i γραμμή και στη j στήλη,

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Πράξεις με πίνακες

Οι πίνακες προστίθενται κατά συνιστώσα, και πολλαπλασιάζονται με αριθμούς, ακριβώς όπως τα διανύσματα. Συχνά θα θεωρούμε ένα n-διάνυσμα ως ένα $n \times 1$ πίνακα.

Μπορούμε να προσθέσουμε δύο πίνακες μόνον εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις, δηλαδή τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών.
Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{6} & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+\sqrt{6} & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 12 & -18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προηγουμένως, γράφαμε το σύστημα (1) με το συμβολισμό πίνακα και διανύσματος,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Για να είναι αυτό κάτι περισσότερο από ένας συμβολισμός, πρέπει να ορίσουμε ακόμη μία πράξη, τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα και ενός διανύσματος, έτσι ώστε η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (3) να είναι ίση με την αριστερή πλευρά της εξίσωσης (2).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Ορισμός. Το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα A με το n-διάνυσμα x είναι ένα m-διάνυσμα Ax, ίσο με το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα A με συντελεστές τις αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος x,

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Προσέξτε τη σχέση ανάμεσα στις διαστάσεις του $m \times n$ πίνακα A, του n-διανύσματος x και του m-διανύσματος Ax.

Συνιστώσες του γινομένου

Εάν $y_1, y_2, \ldots, y_m$ είναι οι συνιστώσες του m διανύσματος Ax, δηλαδή εάν

$$Ax = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

τότε

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\,,$$

δηλαδή, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, y_i είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του πίνακα A με το n-διάνυσμα x.