ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 22

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Γινόμενο πίνακα με διάνυσμα

Είδαμε οτι το γινόμενο ενός $m \times n$ πίνακα με ένα n-διάνυσμα στήλη είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα με συντελεστές τις αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος,

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Γινόμενο διανύσματος με πίνακα

Στη διαδικασία της απαλοιφής, χρησιμοποιούμε γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών του πίνακα.
Στο παράδειγμα αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή του πίνακα από τη δεύτερη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Θα ορίσουμε το γινόμενο ενός διανύσματος-γραμμή με ένα πίνακα, για να παραστήσουμε αυτή τη διαδικασία

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Η γραμμή στα δεξιά είναι ο γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του πίνακα με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος-γραμμή.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι να αφαιρέσουμε 2 φορές την πρώτη γραμμή του πίνακα από τη δεύτερη.

Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα με τη γραμμή $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το αποτέλεσμα είναι η τρίτη γραμμή του πίνακα.

Μπορούμε να εκφράσουμε το πρώτο βήμα της απαλοιφής μέσω ‘πολλαπλασιασμού’ του πίνακα A με έναν πίνακα E:

$$E\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη γραμμή του πίνακα E λέει οτι δεν αλλάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα A.

Η δεύτερη γραμμή του πίνακα E λέει οτι αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα A.

Η τρίτη γραμμή του πίνακα E λέει οτι δεν αλλάζουμε την τρίτη γραμμή του πίνακα A.

Παρατηρούμε οτι η συνιστώσα στη θέση ij του πίνακα στα δεξιά είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του πίνακα E με τη j στήλη του πίνακα A

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A και τον $n \times p$ πίνακα B. Το γινόμενο AB είναι ο $m \times p$ πίνακας, ο οποίος έχει συνιστώσα στη θέση ij το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του A και της j στήλης του B.

Για να ορίζεται το γινόμενο πρέπει ο αριθμός των στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B.

Η i γραμμή του πίνακα AB είναι ο γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του B με συντελεστές τις συνιστώσες της i γραμμής του A.

Η j στήλη του πίνακα AB είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τις συνιστώσες της j στήλης του B.

Για να γράψουμε τη συνιστώσα στη θέση ij του πίνακα AB χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,,$$

όπου $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, p$.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων

Πρόταση

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων

1. *Δεν είναι μεταθετικός.* AB *δεν είναι, εν γένει, ίσο με* BA, *ακόμη και όταν ορίζονται και τα δύο γινόμενα.*
2. *Είναι προσεταιριστικός,*

$$A(CE) = (AC)E\,.$$

3. *Είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.*

$$A(C+D) = AC + AD\,, \qquad (A+B)C = AC + BC\,.$$

Στην πρόταση υποθέτουμε οτι οι πίνακες έχουν διαστάσεις τέτοιες ώστε να ορίζονται τα γινόμενα και τα αθροίσματα.