

MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα  
Διάλεξη 23  
Αντίστροφος πίνακας

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

## Τετραγωνικοί πίνακες

Σε αυτήν τη διάλεξη περιοριζόμαστε σε τετραγωνικούς πίνακες.

**Ορισμός.** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}]$  ονομάζεται **άνω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν  $a_{ij} = 0$  όταν  $i > j$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}]$  ονομάζεται **κάτω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν  $a_{ij} = 0$  όταν  $i < j$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}]$  ονομάζεται **διαγώνιος** εάν όλα τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν  $a_{ij} = 0$  όταν  $i \neq j$ .

## Ταυτοτικός πίνακας

**Ορισμός.** Ο τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις, ονομάζεται **ταυτοτικός πίνακας** και συμβολίζεται  $I_n$ .

Εάν  $A$  είναι  $m \times n$  πίνακας, τότε  $AI_n = A$ , και εάν  $B$  είναι  $n \times p$  πίνακας, τότε  $I_n B = B$ .

## Αντίστροφος πίνακας

**Ορισμός.** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  ονομάζεται **αντιστρέψιμος** εάν υπάρχει ένας πίνακας  $B$  τέτοιος ώστε

$$BA = I \quad \text{και} \quad AB = I.$$

Ένας τέτοιος πίνακας  $B$  ονομάζεται **αντίστροφος** του  $A$ .

Θα δείξουμε ότι αρκεί η μία από τις δύο συνθήκες.

### Πρόταση

Εάν  $A$  είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε υπάρχει πίνακας  $B$  τέτοιος ώστε  $AB = I$  εάν και μόνον εάν υπάρχει πίνακας  $C$  τέτοιος ώστε  $CA = I$ .

### Πρόταση

Εάν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος πίνακας είναι μοναδικός.

Εάν  $A$  είναι αντιστρέψιμος, ο μοναδικός αντίστροφος πίνακας συμβολίζεται  $A^{-1}$ .

### Πρόταση

Εάν  $A$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης  $Ax = b$  είναι η  $x = A^{-1}b$ .

Σημειώνουμε ότι δεν χρειάζεται να βρούμε τον αντίστροφο για να υπολογίσουμε τη λύση. Ο συντομότερος τρόπος να βρούμε τη λύση είναι η απαλοιφή Gauss και η ανάδρομη αντικατάσταση.

### Πρόταση

Το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων  $A$  και  $B$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

### Λήμμα

Εάν  $B$  και  $C$  είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο  $BAC$  είναι αντιστρέψιμος.

### Λήμμα

Ενας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.