ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 30

Γραμμική θήκη, βάση, διάσταση

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Παραγωγή υπόχωρου

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$ **παράγουν** τον υπόχωρο $V \subset \mathbb{R}^n$ εάν

1. $w_j \in V$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και
2. Κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$, δηλαδή για κάθε $v \in V$ υπάρχουν αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε $v = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k$.

Γενικότερα, ένα σύνολο διανυσμάτων $S \subset \mathbb{R}^n$ **παράγει** το διανυσματικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$ εάν $S \subset V$ και κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του S.

Συμβατικά θεωρούμε οτι το κενό σύνολο $\varnothing$ παράγει το μηδενικό υπόχωρο $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Γραμμική θήκη

Λήμμα

Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \dots, w_k$ *του* $\mathbb{R}^n$. *Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$ *που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των* $w_1, \dots, w_k$ *είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \dots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$. Ο υπόχωρος που **παράγεται** από τα διανύσματα $w_1, \dots, w_k$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, \dots, w_k$. Αυτός ο υπόχωρος ονομάζεται **γραμμική θήκη** του συνόλου $\{w_1, \dots, w_k\}$.

Βάση διανυσματικού χώρου

Ορισμός. **Βάση** ενός διανυσματικού υπόχωρου $V \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ το οποίο

1. Παράγει τον υπόχωρο V και
2. Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Μοναδικότητα συντελεστών

Πρόταση

Κάθε διανυσματικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$ έχει μία πεπερασμένη βάση.

Πρόταση

Εάν $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι βάση του διανυσματικού υπόχωρου V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$.

Διάσταση

Κάθε γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διαφορετικός από τον $\{0\}$, έχει άπειρες διαφορετικές βάσεις. Όμως όλες οι βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Πρόταση

Εάν ένας γραμμικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$ έχει μία βάση με k στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός. Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης ενός γραμμικού υπόχωρου V του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διάσταση** του V, και συμβολίζεται $\dim V$.