ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 31

Θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Περιγραφή ενός υπόχωρου

Έχουμε δεί δύο τρόπους να περιγράψουμε ένα διανυσματικό υπόχωρο.

- Μπορεί να γνωρίζουμε ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον υπόχωρο, όπως ο χώρος στηλών, που παράγεται από τις στήλες ενός πίνακα.
- Διαφορετικά, μπορεί να γνωρίζουμε συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα του υποχώρου, όπως ο μηδενοχώρος ενός πίνακα A, που αποτελείται από τα διανύσματα που ικανοποιούν τις συνθήκες $Ax = 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς, ξεκινώντας από μία περιγραφή ενός υπόχωρου, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία βάση του.

Θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα

Για κάθε $m \times n$ πίνακα A έχουμε τέσσερις υπόχωρους οι οποίοι προκύπτουν από τον A:

- Ο **χώρος στηλών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες του A, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m .$$

- Ο **μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n .$$

- Ο **χώρος γραμμών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές του A. Προφανώς συμπίπτει με το χώρο στηλών του ανάστροφου πίνακα A^T, και συμβολίζεται

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- Ο **αριστερός μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης $y^T A = 0$. Συμπίπτει με το μηδενόχωρο του ανάστροφου πίνακα A^T, αφού $y^T A = (A^T y)^T$, και συμβολίζεται

$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Ο χώρος γραμμών του A, $\mathcal{R}(A^T)$

Ο χώρος γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα U έχει ως βάση τις μη μηδενικές γραμμές του U: έχουμε αποδείξει οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και παράγουν όλο το χώρο.

Θα δείξουμε οτι ο χώρος γραμμών του A είναι ίδιος με το χώρο γραμμών του U.

Λήμμα

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)\,.$$

Ως βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U.

Το πλήθος αυτών είναι ίσο με την τάξη r του πίνακα. Συμπεραίνουμε οτι η διάσταση του χώρου γραμμών είναι ίση με την τάξη του πίνακα:

$$\dim \mathcal{R}(A^T) = r\,.$$

Πρόταση

Ο χώρος γραμμών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη του πίνακα,

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A^T) = r$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου κλιμακωτού πίνακα U.

Ο μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A)$.

Ο μηδενόχωρος του A είναι ίσος με το μηδενόχωρο του U.

Μπορούμε να επιλέξουμε τις $k = n - r$ ελεύθερες μεταβλητές $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, και για κάθε μία να υπολογίσουμε το διάνυσμα v_{i_j} που έχει την τιμή 1 στην ελεύθερη μεταβλητή x_{i_j}, και την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές.

Τα διανύσματα $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$.

Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, $k = n - r$.

Πρόταση

Ο μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών,

$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r \, .$$

Ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$.

Ο $\mathcal{R}(A)$ δεν είναι ο ίδιος με τον $\mathcal{R}(U)$.

Το ακόλουθο Λήμμα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των στηλών του A και των στηλών του U.

Λήμμα

Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του U είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Οι r στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν βάση του $\mathcal{R}(U)$.

Οι αντίστοιχες r στήλες $j_1, \ldots, j_r$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Οι στήλες $j_1, \ldots, j_r$ παράγουν το $\mathcal{R}(A)$ και αποτελούν βάση του.

Πρόταση

Ο χώρος στηλών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη r του πίνακα,

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A) = r \, .$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις στήλες του κλιμακωτού πίνακα U που περιέχουν οδηγούς.

Συνθέτοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε το ακόλουθο θεμελιώδες Θεώρημα.

Θεώρημα

Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A, το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A είναι ίσο με την τάξη του πίνακα, δηλαδή ίσο με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A^T)$.

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A είναι ο μηδενόχωρος του ανάστροφου πίνακα A^T.

Για τον πίνακα A^T, το πλήθος όλων των μεταβλητών είναι m και το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A^T είναι ίσο με την τάξη του, r.

Συνεπώς το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του A^T είναι $m - r$, και

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r\,.$$

Μπορούμε να βρούμε μία βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ υπολογίζοντας τις λύσεις της εξίσωσης $A^T y = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να περιγράψουμε τα διανύσματα y που ικανοποιούν $y^T A = 0$, εξετάζοντας την παραγοντοποίηση

$$P\,A = L\,U\,.$$

Οι $m - r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και ανήκουν στο χώρο $\mathcal{N}(A^T)$, ο οποίος έχει διάσταση $m - r$.

Πρόταση

Ο αριστερός μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση $m - r$,

$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r\,.$$

Μία βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ αποτελείται από τις $m - r$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss.