ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα
Διάλεξη 35
Μέτρο και ορθογωνιότητα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Μήκος διανύσματος

Στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$, βρίσκουμε το μήκος ενός διανύσματος $x = (x_1, x_2)$ χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 \,.$$

Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα 2 φορές: εάν $x = (x_1, x_2, x_3)$ και $u = (x_1, x_2, 0)$

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||u||^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ανάστροφου, αυτό γράφεται

$$||x||^2 = x^T x \,.$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα $n-1$ φορές, βρίσκουμε το μήκος ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= x^T x\,. \end{aligned}$$

Ονομάζουμε **μέτρο** του διανύσματος $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τον αριθμό

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ &= \sqrt{x^T x}\,. \end{aligned}$$

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ τον αριθμό

$$x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\,.$$

Ορθογώνια διανύσματα

Πότε είναι δύο διανύσματα $x\,,y$ **ορθογώνια**;

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει και αντίστροφα: ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο **μόνον** όταν το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των 2 πλευρών.

Η γωνία $\angle(x,\, y)$ μεταξύ των διανυσμάτων x και $y \in \mathbb{R}^n$ είναι **ορθή** εάν και μόνον εάν

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x-y||^2\,,$$

δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0$$

ή

$$x^T y = 0\,.$$

Πρόταση

Δύο διανύσματα x και y του $\mathbb{R}^n$ είναι ***ορθογώνια*** *εάν και μόνον εάν το εσωτερικό τους γινόμενο $x^T y$ είναι 0.*

Ένα διάνυσμα είναι ορθογώνιο στον εαυτό του μόνον εάν έχει μηδενικό μήκος: $x^T x = 0$. Το μοναδικό τέτοιο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ είναι το 0.

Ορθογωνιότητα και γραμμική ανεξαρτησία

Πρόταση

Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ είναι μη μηδενικά και ορθογώνια μεταξύ τους, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Είναι προφανές οτι δεν ισχύει το αντίστροφο: δυο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα δεν είναι υποχρεωτικά ορθογώνια.