ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 36
Ορθογώνιοι υπόχωροι

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Ορθογώνιοι υπόχωροι

Στον $\mathbb{R}^3$, μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν σχηματίζει ορθή γωνία με κάθε ευθεία του επιπέδου που την τέμνει.

Ανάλογα, δύο υπόχωροι V και W του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι **ορθογώνιοι** όταν **κάθε** διάνυσμα του V είναι ορθογώνιο σε **κάθε** διάνυσμα του W.

Θα συμβολίζουμε την ορθογωνιότητα δύο γραμμικών υπόχωρων U και V του $\mathbb{R}^n$ με $U \perp V$.

Θεμελιώδεις υπόχωροι ορθογώνιοι

Πρόταση

Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε

1. *Στο $\mathbb{R}^n$ ο χώρος γραμμών του A είναι ορθογώνιος στο μηδενόχωρο του A:*
$$\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)\,.$$
2. *Στο $\mathbb{R}^m$ ο χώρος στηλών του A είναι ορθογώνιος στον αριστερό μηδενόχωρο του A:*
$$\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)\,.$$

Ορθογώνια συμπληρώματα

Οι διαστάσεις αυτών των χώρων ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}(A^T) + \dim \mathcal{N}(A) &= n \\ \dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A^T) &= m \end{aligned}$$

Ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος είναι δύο ορθογώνιοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που ‘‘γεμίζουν’’ τον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του V, αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V στον $\mathbb{R}^n$, και συμβολίζεται $V^\perp$.

Θεμελιώδεις υπόχωροι ως ορθογώνια συμπληρώματα

Θεώρημα

Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε

1. *Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στον $\mathbb{R}^n$, και ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^{\perp} \quad \textit{και} \quad \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^{\perp}.$$

2. *Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$ στον $\mathbb{R}^m$, και ο χώρος στηλών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του αριστερού μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^m$,*

$$\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^{\perp} \quad \textit{και} \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^T)^{\perp}.$$

Ιδιότητες ορθογωνίων συμπληρωμάτων

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$, και W το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, $W = V^\perp$. Τότε

1. *Η διάσταση του W είναι $\dim W = n - \dim V$, και $V \cap W = \{0\}$.*
2. *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι ο V: εάν $W = V^\perp$ τότε $V = W^\perp$.*
3. *Εάν $\{v_1, \dots, v_k\}$ είναι βάση του V και $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ βάση του W, τότε $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.*
4. *Κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός διανύσματος του W.*