ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 41
Ορίζουσες

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Ορίζουσα 2×2

Γνωρίζουμε την ορίζουσα για 2×2 πίνακες.

Εάν

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ιδιότητες των οριζουσών 2×2 πινάκων

Για τις ορίζουσες 2×2 πινάκων εύκολα ελέγχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} &= cb - da \\ &= -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3. Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+a')d-(b+b')c \\
&= (ad-bc)+(a'd-b'c) \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} &= tad-tbc \\
&= t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ορίζουσες για $n \times n$ πίνακες

Θα δείξουμε οτι αυτές οι τρεις ιδιότητες χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός. **Ορίζουσα** ονομάζεται μία συνάρτηση στο σύνολο $M_{n,\,n}$ των $n \times n$ πινάκων,

$$\det : \; M_{n,\,n} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

η οποία συμβολίζεται $\det A$ ή $|A|$, και ικανοποιεί τις ιδιότητες :

1. *Η ορίζουσα του $n \times n$ ταυτοτικού πίνακα είναι 1,*

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. *Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε*

$$\det B = -\det A\,.$$

3. *Η* det *εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Προσέξτε οτι δεν ισχύουν οι ισότητες $\det(A+B) = \det A + \det B$ και $\det(tA) = t\det A$, παρά μόνον όταν $n=1$.

Άλλες ιδιότητες των οριζουσών

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (2) και (3), βλέπουμε οτι η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα.

Από τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες θα συμπεράνουμε διάφορες άλλες ιδιότητες των οριζουσών, που θα μας επιτρέψουν να δείξουμε οτι υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες.

4. *Εάν δύο γραμμές του πίνακα A είναι ίσες, τότε* $\det A = 0$.
5. *Οταν αφαιρούμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη, η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει.*

Από τις ιδιότητες (2) και (5) προκύπτει οτι η διαδικασία απαλοιφής Gauss δεν αλλάζει την τιμή της ορίζουσας, παρά μόνο ως προς το πρόσημο.

6. *Εάν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή, τότε* $\det A = 0$.

7. *Εάν D είναι διαγώνιος πίνακας*

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix},$$

τότε $\det D = d_1\, d_2 \dots d_n$.

8. *Εάν ο A είναι τριγωνικός, τότε η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.*

Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση στο σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες (1), (2) και (3). Έτσι η ορίζουσα είναι **καλά ορισμένη.**

Τρία θεωρήματα για τις ορίζουσες

Θεώρημα

Η ορίζουσα $\det A$ *είναι μηδέν εάν και μόνον εάν ο πίνακας* A *είναι ιδιόμορφος.*

Θεώρημα

Εάν A, B *είναι* $n \times n$ *πίνακες,*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Θεώρημα

Η ορίζουσα του αναστρόφου του πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A,

$$\det(A^T) = \det A \, .$$

Αυτό το Θεώρημα αμέσως διπλασιάζει τον κατάλογο των ιδιοτήτων των οριζουσών: *για κάθε ιδιότητα για τις γραμμές ενός πίνακα, ισχύει και η αντίστοιχη ιδιότητα για τις στήλες του πίνακα.*