Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 8
Γραμμικές Απεικονίσεις

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

14/3/2014

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός. Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους V και U πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Η απεικόνιση $L : V \to U$ ονομάζεται **γραμμική** εάν για κάθε v, $w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$\begin{aligned} L(v+w) &= L(v) + L(w) \\ L(av) &= a\,L(v) \end{aligned}$$

Γραμμικές απεικονίσεις (2)

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει οτι μπορούμε να συνδυάσουμε τον έλεγχο των δύο συνθηκών σε μία.

Λήμμα

Η απεικόνιση L είναι γραμμική εάν και μόνον εάν, για κάθε $v, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$L(av + w) = aL(v) + L(w) .$$

Η απόδειξη του βασίζεται στην επιλογή κατάλληλων τιμών του a και του w.

Παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων

Η **μηδενική** απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to W$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στο μηδενικό διάνυσμα του W, $\mathbf{0}(v) = 0$, είναι γραμμική.

Η **ταυτοτική** απεικόνιση $\mathbf{I}_V : V \to V$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στον εαυτό του, $\mathbf{I}_V(v) = v$, είναι γραμμική.

Παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων (2)

Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, η απεικόνιση

$$T_a : V \to V , \qquad T_a(v) = a\, v$$

είναι γραμμική.

Παρατηρούμε οτι

$$\mathbf{0} : V \to V \quad \text{είναι ίση με την} \quad T_0 : V \to V ,$$

$$\mathbf{I} : V \to V \quad \text{είναι ίση με την} \quad T_1 : V \to V .$$

Παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων (3)

Για κάθε $m \times n$ πίνακα A, η απεικόνιση

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \qquad T_A(x) = Ax$$

είναι γραμμική.

Για κάθε πολυώνυμο $q(x)$ με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{K}$, η απεικόνιση

$$T_q : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]\,, \qquad T_q(p)(x) = q(x)p(x)$$

είναι γραμμική.

Παραδείγματα **μη γραμμικών** απεικονίσεων

Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$$

δεν είναι γραμμική εάν $b \neq 0$, παρ' όλο που το γράφημα της είναι μία ευθεία.

Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και $b \in \mathbb{R}^m$, η απεικόνιση

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$$

δεν είναι γραμμική εάν $b \neq 0$.

Εξάρτηση από το σώμα

Η γραμμικότητα μιας απεικόνισης εξαρτάται με ουσιαστικό τρόπο από το σώμα πάνω από το οποίο ορίζονται οι διανυσματικοί χώροι.

Η απεικόνιση

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα, αλλά η επαλήθευση της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας εξαρτάται από το σώμα ορισμού.

Η L δεν είναι γραμμική απεικόνιση όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

Εάν όμως θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως το διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, τότε η $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική.

Ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων

Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $L : V \to W$ και $M : V \to W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $a \in \mathbb{K}$, τότε οι απεικονίσεις

$$L + M : V \to W : v \mapsto L(v) + M(v)$$

$$aL : V \to W : v \mapsto aL(v)$$

είναι επίσης γραμμικές.

Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το διανυσματικό χώρο V στο W συμβολίζεται

$$\mathcal{L}(V, W) \quad \text{ή} \quad \mathrm{Hom}(V, W).$$

Με τις παραπάνω πράξεις $\mathcal{L}(V, W)$ είναι *διανυσματικός χώρος* πάνω από το $\mathbb{K}$.

Γραμμικές απεικονίσεις και γραμμική ανεξαρτησία

Στο επόμενο αποτέλεσμα δείχνουμε οτι μια γραμμική απεικόνιση μπορεί να χαλάσει τη γραμμική ανεξαρτησία μιας συλλογής διανυσμάτων, αλλά δεν μπορεί να αλλάξει γραμμικά εξαρτημένη συλλογή σε γραμμικά ανεξάρτητη.

Λήμμα

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.

1. $L(0) = 0$.
2. *Εάν τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $L(v_1), \dots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
3. *Εάν $L(v_1), \dots, L(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*