Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 9

Γραμμικοί Ισομορφισμοί

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

19/3/2014

Εικόνα γραμμικής απεικόνισης

Λήμμα

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V *και* W, *γραμμική απεικόνιση* $L : V \to W$, *και γραμμικούς υπόχωρους* $X \subseteq V$ *και* $Y \subseteq W$.

1. *Η εικόνα* $L(X)$ *είναι γραμμικός υπόχωρος του* W, *και η αντίστροφη εικόνα* $L^{-1}(Y)$ *είναι γραμμικός υπόχωρος του* V.
2. $\dim (L(X)) \leq \dim X$.

Εικόνα και πυρήνας

Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, ο υπόχωρος $L(V) \subseteq W$ ονομάζεται **εικόνα** της L, και συμβολίζεται $\mathrm{im}\, L$.

Η διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης L ονομάζεται **τάξη** της L και συμβολίζεται $\mathrm{rank}\, L$.

Ο υπόχωρος $L^{-1}(\{0\}) \subseteq V$ ονομάζεται **πυρήνας** της L, και συμβολίζεται $\ker L$.

Πρόταση

Η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν $\ker L = \{0\}$.

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Παράδειγμα Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = Ax$.
Ο πυρήνας της L είναι το σύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $Ax = 0$, δηλαδή ο μηδενόχωρος του πίνακα A,

$$\ker L = \mathcal{N}(A)\,.$$

Η εικόνα της L είναι ο χώρος όλων των διανυσμάτων $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = y$, δηλαδή ο χώρος στηλών του A,

$$\mathrm{im}\, L = \mathcal{R}(A)\,.$$

Η απεικόνιση L είναι *ενεικονική* εάν και μόνον εάν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, δηλαδή όταν ο πίνακας A έχει τάξη n.
Η απεικόνιση L είναι *επεικονική* εάν και μόνον εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν ο πίνακας A έχει τάξη m.

Τύπος διαστάσεων

Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου και η διάσταση του χώρου στηλών ενός $m \times n$ πίνακα ικανοποιούν τη σχέση

$$n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) \, .$$

Συνεπώς για την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = AX$, ισχύει

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker L + \dim \mathrm{im}\, L \, .$$

Θεώρημα

Εάν $L : V \to W$, *είναι γραμμική απεικόνιση, και* $\dim V < \infty$, *τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \mathrm{im}\, L \, .$$

Τύπος διαστάσεων (2)

Πόρισμα

Εάν $\dim V > \dim W$, *τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* V *στο* W *που να είναι ενεικονική.*

Πόρισμα

Εάν $\dim V < \dim W$, *τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* V *στο* W *που να είναι επεικονική.*

Γραμμική απεικόνιση και βάση

Πρόταση

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση του V και $f : \mathcal{B} \to W$ είναι οποιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in \mathcal{B}$, $L(v) = f(v)$.

1. *Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ είναι ο υπόχωρος του W που παράγεται από το σύνολο $f(\mathcal{B})$,*
2. *Η L είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν η συλλογή $f(v)$ για $v \in \mathcal{B}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη (Αυτό σημαίνει οτι η απεικόνιση συνόλων $f : \mathcal{B} \to W$ είναι ενεικόνιση και το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του W).*

Γραμμική απεικόνιση και βάση (2)

Αξίζει να διατυπώσουμε την προηγούμενη Πρόταση στην ειδικότερη περίπτωση των χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Τότε μία βάση του V είναι πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και η Πρόταση λέει οτι μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συλλογή διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_n$, και τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία $L(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Η εικόνα της L είναι ο υπόχωρος $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in W$, και η L είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν η συλλογή $w_1, \ldots, w_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

Πρόταση

Εάν $L : V \to W$ *και* $M : W \to U$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση*

$$M \circ L : V \to U$$

είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.

Λήμμα

Εάν η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ *είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (δηλαδή είναι ενεικονική και επεικονική), τότε η αντίστροφη απεικόνιση* $L^{-1} : W \to V$ *είναι επίσης γραμμική.*

Ισομορφισμοί

Ορισμός. Μία γραμμική απεικόνιση η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη ονομάζεται **ισομορφισμός**.

Εάν υπάρχει ισομορφισμός $L : V \to W$ μεταξύ των διανυσματικών χώρων V και W λέμε οτι οι χώροι V και W είναι **ισομορφικοί** και το συμβολίζουμε $V \cong W$.

Από την άποψη της Γραμμικής Άλγεβρας, δύο ισομορφικοί χώροι είναι πανομοιότυποι.

Οποιαδήποτε ιδιότητα έχει ένα υποσύνολο X του V η οποία εκφράζεται αποκλειστικά μέσω γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του, την ίδια ιδιότητα έχει και η εικόνα Y του υποσυνόλου X στο W μέσω του ισομορφισμού L.

Διάνυσμα Συντεταγμένων

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ του V.
Σε κάθε διάνυσμα $w \in V$ αντιστοιχεί το διατεταγμένο σύνολο των n αριθμών του $\mathbb{K}$, $(a_1, \dots, a_n)$ για τους οποίους

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,.$$

Το αριθμητικό διάνυσμα $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ονομάζεται **διάνυσμα συντεταγμένων** του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ και θα το συμβολίζουμε $w_{\mathcal{B}}$.

Λήμμα

Η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ που ορίζει η παραπάνω αντιστοιχία είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα Δομής Διανυσματικών Χώρων Πεπερασμένης Διάστασης

Ένα Θεώρημα Δομής είναι ένα θεώρημα που ταξινομεί μία κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων συγκρίνοντας τα με συγκεκριμένα αντικείμενα, τη δομή των οποίων καταλαβαίνουμε αρκετά ικανοποιητικά.

Θεώρημα

Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και $\dim V = n$. Τότε ο V είναι ισομορφικός με το χώρο $\mathbb{K}^n$,

$$V \cong \mathbb{K}^n .$$