Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 10

Το Ευθύ Άθροισμα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

26/3/2014

Ευθύ Άθροισμα

Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$:

για $(v, w), (x, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v, w) = (a\,v, a\,w)\,.$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** των V και W, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

Ευθύ Άθροισμα (2)

Το ακόλουθο Λήμμα εξηγεί τη σχέση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

Λήμμα

Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των X και Y είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

Ευθύ Άθροισμα (3)

Λήμμα

Εάν $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *και* $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα στους διανυσματικούς χώρους* V *και* W *αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του $V \oplus W$.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για *παράγοντα σύνολα ή βάσεις* στους διανυσματικούς χώρους V και W.

Διάσταση του ευθέως αθροίσματος

Θεώρημα

Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W\,.$$

Κανονικές εμφυτεύσεις και προβολές

Με το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων V και W συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

1. Οι **κανονικές εμφυτεύσεις** του V και του W στο $V \oplus W$,

$$\begin{aligned} j_1 : V \longrightarrow V \oplus W \quad &: \quad v \mapsto (v, 0) \\ j_2 : W \longrightarrow V \oplus W \quad &: \quad w \mapsto (0, w)\,. \end{aligned}$$

2. Οι **κανονικές προβολές** του $V \oplus W$ επί των V και W,

$$\begin{aligned} p_1 : V \oplus W \longrightarrow V \quad &: \quad (v, w) \mapsto v \\ p_2 : V \oplus W \longrightarrow W \quad &: \quad (v, w) \mapsto w\,. \end{aligned}$$