Γραμμική Άλγεβρα II

Διάλεξη 11
Ο Χώρος Πηλίκο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

28/3/2014

Σύνολο Πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμικό υπόχωρο X του V. Στο V ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X\,.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε **πηλίκο** του V με το X, και το συμβολίζουμε

$$V/X\,.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}\,.$$

Χώρος Πηλίκο

Στο πηλίκο V/X ορίζουμε τις πράξεις, για $v+X,\ y+X \in V/X$, $a \in \mathbb{K}$.

$$(v+X)+(w+X)=(v+w)+X$$

$$a\,(v+X)=a\,v+X\,.$$

Λήμμα

Με αυτές τις πράξεις V/X είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$.

Ο διανυσματικός χώρος V/X ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του V mod X.

Διάσταση του χώρου πηλίκο

Θεώρημα

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V *πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο* X *του* V. *Εάν* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *είναι βάση του* X,
και $\{x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_m\}$ *βάση του* V,
τότε $\{v_1 + X, \ldots, v_m + X\}$ *αποτελεί βάση του* V/X,
και συνεπώς

$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X .$$

Θεωρήματα Ισομορφισμού

Θεώρημα (Θεώρημα Ισομορφισμού)

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.

1. *Η απεικόνιση*

$$\tilde{L} : V/\ker L \longrightarrow W\,, \qquad \tilde{L}(v + \ker L) = L(v)\,,$$

   είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και η L παραγοντοποιείται ως σύνθεση $L = \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \longrightarrow V/\ker L$ είναι η κανονική επεικόνιση $v \mapsto v + \ker L$.

2. *Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$V/\ker L \cong \mathrm{im}\, L\,.$$

Παραγοντοποίηση Γραμμικών Απεικονίσεων

Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, η γραμμική απεικόνιση

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$$

μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τριών απεικονίσεων,

$$T_A = E \circ L \circ P \,,$$

όπου

1. $P : \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}(A^T)$ είναι η προβολή στο χώρο γραμμών,
2. $L : \mathcal{R}(A^T) \to \mathcal{R}(A)$ είναι η αντιστρέψιμη απεικόνιση $L(x) = Ax$ από το χώρο γραμμών στο χώρο στηλών του A, και
3. $E : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}^m$ είναι ο εγκλεισμός $E(y) = y$.

Παραγοντοποίηση Γραμμικών Απεικονίσεων (2)

Σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, χωρίς επιλεγμένες βάσεις, έχουμε μια ανάλογη παραγοντοποίηση, όπου τη θέση του χώρου γραμμών καταλαμβάνει το πηλίκο.

Πρόταση

Εάν $L : V \to W$ *είναι γραμμική απεικόνιση, τότε*

$$L = E \circ \tilde{L} \circ P \,,$$

όπου

1. $P : V \to V/\ker(L)$ *είναι η κανονική επεικόνιση,*
2. $\tilde{L} : V/\ker(L) \to \mathrm{im}\,(L)$ *είναι ο κανονικός ισομορφισμός και*
3. $E : \mathrm{im}\,(L) \to W$ *είναι ο εγκλεισμός.*

Θεωρήματα Ισομορφισμού (2)

Πρόταση (Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.)

1. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V. Τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(X+Y)/Y \cong X/(X\cap Y)\,.$$

2. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V τέτοιους ώστε $X \subseteq Y$. Τότε Y/X είναι υπόχωρος του V/X, και υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(V/X)/(Y/X) \cong V/Y\,.$$