Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 12
Ο Δυϊκός Χώρος

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

4/4/2014

Ο Δυϊκός Χώρος

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ των γραμμικών συναρτήσεων από το V στο $\mathbb{K}$ ονομάζεται **δυϊκός χώρος** του V και συμβολίζεται V'.

Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi \rangle = a\,.$$

Η δυϊκή βάση

Θεώρημα

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V, τότε υπάρχει βάση του V', $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, για την οποία, με το συμβολισμό δ_{ij} του Kronecker,

$$\varphi_j(v_i) = \langle v_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$

και άρα

$$\dim V' = \dim V\,.$$

Η βάση $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ονομάζεται **δυϊκή βάση** της $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Διάκριση σημείων

Τα στοιχεία του δυϊκού χώρου διακρίνουν τα σημεία του χώρου: για κάθε δύο σημεία του χώρου, υπάρχει ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου που λαμβάνει διαφορετικές τιμές στα δύο σημεία.

Θεώρημα

Εάν $v, w \in V$ και $v \neq w$, τότε υπάρχει $\psi \in V'$ τέτοιο ώστε

$$\psi(v) = \langle v, \psi \rangle \neq \langle w, \psi \rangle = \psi(w) .$$

Η δυϊκή απεικόνιση

Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να ορίσουμε τη **δυϊκή απεικόνιση** L' (ή **ανάστροφη απεικόνιση** L^T) ανάμεσα στους δυϊκούς χώρους:

$$L' : W' \to V' \quad , \quad L'(\psi) = \psi \circ L \, .$$

Προσέξτε οτι η L' έχει φορά αντίθετη από την L, και ικανοποιεί τη σχέση $\langle v, L'\psi \rangle = \langle Lv, \psi \rangle$.

Παρατηρούμε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto L'$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{L}(V, W)$ στο $\mathcal{L}(W', V')$: $(a\, L + M)' = a\, L' + M'$.

Η δυϊκή απεικόνιση

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $L : U \to V$.

1. *Εάν L είναι επεικονική, τότε η δυϊκή απεικόνιση $L' : V' \to U'$ είναι ενεικονική.*
2. *Εάν L είναι ενεικονική, τότε η δυϊκή απεικόνιση L' είναι επεικονική.*
3. *Εάν $M : V \to W$ είναι επίσης γραμμική απεικόνιση, τότε $(M \circ L)' = L' \circ M'$.*
4. *Εάν η $L : U \to V$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η $L' : V' \to U'$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και $(L^{-1})' = (L')^{-1}$.*

Ο διπλός δυϊκός χώρος

Αφού ο δυϊκός χώρος V' είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το δυϊκό του χώρο, $(V')'$, ο οποίος συμβολίζεται V''. Ένα στοιχείο χ του χώρου V'' είναι μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο V',

$$\chi \, : \, V' \longrightarrow \mathbb{K} \, : \, \psi \mapsto \chi(\psi)\,.$$

Θεώρημα

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η απεικόνιση

$$\nu \, : \, V \longrightarrow V'' \, : \, v \longmapsto (\eta \, : \, \psi \mapsto \langle v, \, \psi \rangle)$$

είναι (κανονικός) ισομορφισμός.

Η δυϊκή απεικόνιση και ο κανονικός ισομορφισμός

Πρόταση

Εάν οι χώροι U και V είναι πεπερασμένης διάστασης και $L : U \to V$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccccc} & U & \longrightarrow & V & \\ \nu_U & \downarrow & & \downarrow & \nu_V \\ & U'' & \longrightarrow & V'' & \end{array} \quad , \ \textit{δηλαδή} \ \ \nu_V \circ L = L'' \circ \nu_U \, ,$$

όπου $L'' = (L')'$ και ν_U, ν_V είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.