Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 13

Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

28/4/2014

Πίνακες πάνω από σώμα $\mathbb{K}$.

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ ή $\mathbb{K}^{m,n}$ ή $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Για οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος.

Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και B είναι $n \times k$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ορίζεται το γινόμενο $C = AB$,

$$c_{i\,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\,\ell}\, b_{\ell\,j}\,.$$

Απαλοιφή Gauss.

Η απαλοιφή Gauss μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$ για να μετατρέψουμε ένα $m \times n$ πίνακα σε ένα γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

Η **τάξη** του πίνακα A είναι ο αριθμός $r(A)$,

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του } A \\ &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του } A \\ &= \text{αριθμός οδηγών στο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα} \\ &\quad\ \text{σε κλιμακωτή μορφή} \end{aligned}$$

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες.

Πρόταση

Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *αντιστοιχεί σε ένα* $m \times n$ *πίνακα* A, *τέτοιο ώστε, για κάθε* $b \in \mathbb{K}^n$, $L(b) = Ab$,

$$L(b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Η j *στήλη του* A *είναι το διάνυσμα* $L(e_j) \in \mathbb{K}^m$, *όπου* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{K}^n$.

Γραμμικές απεικονίσεις και βάσεις

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.

Επιλέγουμε μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Τότε ορίζεται ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n : v \mapsto v_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n),$$

όπου $v_{\mathcal{B}}$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Επιλέγουμε μία βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ του W. Τότε ορίζεται ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m : w \mapsto w_{\mathcal{C}} = (c_1, \ldots, c_m),$$

όπου $w_{\mathcal{C}}$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Εάν συνθέσουμε τη γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ από τα δεξιά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to V$ και από τα αριστερά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m$, έχουμε την απεικόνιση

$$\iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Αυτή η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε

$$A\,b = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας της απεικόνισης L

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα A

Η πρώτη στήλη του πίνακα A είναι

$$A\, e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} .$$

Αλλά

$$e_1 = \iota_{\mathcal{B}}(v_1)$$

και

$$A\, e_1 = \iota_{\mathcal{C}}(L(v_1)) .$$

Δηλαδή, η πρώτη στήλη του πίνακα A είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.

Ο πίνακας της απεικόνισης L (2)

Για κάθε διάνυσμα v_j της βάσης $\mathcal{B}$ του V, η j στήλη του πινακα A, $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} L(v_j) &= a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \, . \end{aligned}$$

Ο πίνακας της απεικόνισης L (3)

Ο $m \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ ονομάζεται **πίνακας της απεικόνισης** $L : V \to W$ **ως προς τις βάσεις** $\mathcal{B}$ **του** V **και** $\mathcal{C}$ **του** W και τον συμβολίζουμε ${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$.

Χαρακτηρίζεται από τη σχέση

$$ {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = w_{\mathcal{C}} \, , $$

δηλαδή

$$ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} $$

εάν και μόνον εάν

$$ L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m \, . $$

Ο πίνακας της απεικόνισης L (4)

Αντίστροφα, εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$L_A : V \longrightarrow W$$

τέτοια ώστε

$$L_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \text{ για } j = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Θεώρημα

Η αντιστοιχία $A \mapsto L_A$, ορίζει έναν ισομορφισμό από το χώρο $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ στο χώρο $\mathcal{L}(V, W)$.

Πυρήνας και εικόνα της απεικόνισης

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, για να υπολογίσουμε βάσεις του πυρήνα και της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Πρόταση

1. $\ker L = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\ker T_A) = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{N}(A))$. *Δηλαδή το διάνυσμα* $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ *ανήκει στον πυρήνα της* L *εάν και μόνον εάν* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα* A.
2. $\mathrm{im}\, L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathrm{im}\, T_A) = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathcal{R}(A))$. *Δηλαδή* $b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$ *ανήκει στην εικόνα της* L *εάν και μόνον εάν* $(b_1, \ldots, b_m)$ *ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα* A.

Σύνθεση απεικονίσεων

Η αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, στέλνει τη σύνθεση δύο απεικονίσεων στο γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων.

Θεώρημα

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V, W, Z *πεπερασμένης διάστασης, και βάσεις* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *και* $\mathcal{D} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ *αντίστοιχα. Εάν* $L : V \to W$ *και* $M : W \to Z$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις,*

$$A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\,, \quad B = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}\,, \quad \textit{και} \quad C = {}_{\mathcal{D}}(M \circ L)_{\mathcal{B}}\,,$$

τότε

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i\,, \quad \textit{δηλαδή} \quad C = BA\,,$$

Πίνακας αντίστροφης απεικόνισης

Πόρισμα

Εάν $L : V \to W$ είναι ισομορφισμός, και $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, τότε ο πίνακας της L^{-1}, ως προς τις ίδιες βάσεις, είναι ο A^{-1},

$$_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}} = \left({}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Πίνακας της δυϊκής απεικόνισης

Πρόταση

Εάν $L : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, και $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, τότε ο πίνακας $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'}$ της δυϊκής απεικόνισης $L' : W' \longrightarrow V'$, ως προς τις δυϊκές βάσεις, είναι ο ανάστροφος του A, $A' = A^T$,

$${}_{\mathcal{B}'}(L')_{\mathcal{C}'} = \left({}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\right)^T .$$