Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 14
Αλλαγή βάσης

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

30/4/2014

Αλλαγή βάσης στο V.

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, και δύο διαφορετικές βάσεις του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

και

$$\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Για να προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα
στις συντεταγμένες ενός διανύσματος $w \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$
και τις συντεταγμένες του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$
θεωρούμε τον πίνακα B που παριστάνει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{I}_V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{B}$.

Πίνακας μετάβασης

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} .$$

Ο πίνακας B ονομάζεται **πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση** $\mathcal{B}$.

Έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $x_j \in \mathcal{B}'$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$x_j = b_{1j}\, v_1 + \cdots + b_{nj}\, v_n . \tag{1}$$

Συντεταγμένες ως προς διαφορετικές βάσεις

Εάν

$$\begin{aligned} w &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \,, \end{aligned}$$

τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος w ως προς τις δύο βάσεις συνδέονται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$

Αντίστροφος πίνακας μετάβασης

Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος

$$B^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$.

Αλλαγή βάσεων σε απεικόνιση

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.

Υποθέτουμε οτι $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι βάσεις του V,

ενώ $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και $\mathcal{C}' = \{y_1, \ldots, y_m\}$ είναι βάσεις του W.

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$ του V είναι

$$B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} = (b_{ij}),$$

και ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}'$ στη βάση $\mathcal{C}$ του W είναι

$$C = {}_{\mathcal{C}}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}'} = (c_{k\ell}).$$

Αλλαγή βάσεων σε απεικόνιση (2)

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \,, \tag{2}$$

και για κάθε $\ell = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k \,. \tag{3}$$

Αλλαγή βάσεων σε απεικόνιση (3)

Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ki})$ της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Τότε

$$L(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k\,. \tag{4}$$

Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $D = (d_{\ell j})$ της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$. Τότε

$$L(x_j) = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell\,. \tag{5}$$

Αλλαγή βάσεων σε απεικόνιση (4)

Εφαρμόζουμε την L στην (2), αντικαθιστούμε το $L(v_i)$ από την (4) και έχουμε

$$L(x_j) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \, b_{ij} \right) w_k \, .$$

Στην (5) αντικαθιστούμε το y_ℓ από την (3) και έχουμε

$$L(x_j) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell} \, d_{\ell j} \right) w_k \, .$$

Αλλαγή βάσεων σε απεικόνιση (5)

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών έχουμε, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $k = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j} \,,$$

δηλαδή

$$AB = CD \,.$$