Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 15

Αναλλοίωτοι Υπόχωροι, Ιδιόχωροι

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2/5/2014

Αναλλοίωτοι υπόχωροι.

Μία απεικόνιση από ένα διανυσματικό χώρο V στον εαυτό του,

$$L : V \to V$$

την ονομάζουμε **γραμμικό τελεστή** στο V (ή **ενδομορφισμό** του V).

Ορισμός. $L : V \to V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται **αναλλοίωτος** υπόχωρος από τον τελεστή L, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε οτι δεν υποθέτουμε οτι $L(X) = X$, ούτε οτι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

Θα μελετήσουμε αναλλοίωτους υπόχωρους σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Ο πίνακας του τελεστή

Εάν V είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, και X είναι υπόχωρος, γνωρίζουμε οτι κάθε βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \ldots, x_k,\ v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V.

Εάν X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \to V$, και $[a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\{x_1, \ldots, x_k,\ v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i \,.$$

Όμως $L(x_j) \in X$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Ο πίνακας του τελεστή (2)

Άρα ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} * & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & * \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Ιδιοδιανύσματα, ιδιοτιμές.

Θέλουμε να εξετάσουμε αναλλοίωτους υπόχωρους του τελεστή $L : V \to V$ στους οποίους ο L δρα με τον πιο απλό τρόπο, πολλαπλασιάζοντας κάθε διάνυσμα με ένα σταθερό αριθμό.

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$.
Οι αριθμοί λ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν

$$L\,v = \lambda v \tag{1}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του γραμμικού τελεστή L, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την (1) ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του L για την ιδιοτιμή λ.
Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του L για την ιδιοτιμή λ, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί έναν υπόχωρο του V αναλλοίωτο από τον L, που ονομάζεται **ιδιόχωρος** του L για την ιδιοτιμή λ.

Ιδιοτιμές και ισομορφισμοί.

Πρόταση

Εάν $L : V \to V$ *και* $M : W \to W$ *είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός* $T : V \to W$ *τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

τότε οι τελεστές L *και* M *έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Γραμμική ανεξαρτησία ιδιοδιανυσμάτων

Θεώρημα

Θεωρούμε τελεστή $L : V \to V$, *και* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *διαφορετικές ιδιοτιμές του* L, *με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $v_1, \dots, v_m$. *Τότε το σύνολο* $\{v_1, \dots, v_m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Πόρισμα

Κάθε τελεστής στο V *έχει το πολύ* $\dim V$ *διαφορετικές ιδιοτιμές*

Ο ιδιόχωρος μίας ιδιοτιμής.

Λήμμα

Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ *είναι ιδιοτιμή του τελεστή* $L : V \to V$ *εάν και μόνον εάν* $L - \lambda \mathbf{I}_V$ *δεν είναι ενεικόνιση.*
Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ *είναι ο πυρήνας* $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$*, και κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του* $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$ *είναι ιδιοδιάνυσμα του* L *για την ιδιοτιμή* λ.

Πολυώνυμα και τελεστές

Εάν $L : V \to V$ είναι γραμμικός τελεστής στο V, τότε οι δυνάμεις $L^i = L \circ \cdots \circ L$ είναι επίσης γραμμικοί τελεστές στο V.
Θεωρούμε ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k \,.$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή L στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου, και το αποτέλεσμα είναι πάλι ένας γραμμικός τελεστής στο V,

$$p(L) = a_0 \mathbf{I}_V + a_1 L + \cdots + a_k L^k$$

$$p(L) \,:\, V \to V \,:\, v \mapsto a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_k L^k(v) \,.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L) \,.$$

Ρίζες πολυωνύμων

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα από τη θεωρία των πολυωνύμων.

Θεώρημα

Εάν $\mathbb{K}$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών (ή οποιοδήποτε αλγεβρικά κλειστό σώμα) κάθε πολυώνυμο βαθμού n παραγοντοποιείται σε γινόμενο n διωνύμων.
Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ τέτοιοι ώστε:

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = a_n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n) .$$

Οι αριθμοί λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n είναι οι **ρίζες** του πολυωνύμου.
Πολλαπλότητα μίας ρίζας λ_i είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k για τον οποίο $(t - \lambda_i)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο.

Ύπαρξη ιδιοτιμών.

Θεώρημα

Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.

Ιδιοτιμές και πίνακες

Πρόταση

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση $\mathcal{B}$ του V, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Δύο πίνακες A και B λέγονται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$.

Πρόταση

Δύο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.