Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 16

Τριγωνικοί πίνακες, Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

5/5/2014

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο τελεστή

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και L είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V, θεωρούμε πίνακες A και B που αντιστοιχούν στον L ως προς διαφορετικές βάσεις του V.
Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και συνεπώς $\det A = \det B$.
Οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n) .$$

Μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή L, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V.

Διαγώνιος πίνακας

Πρόταση

Εάν $L : V \to V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L, τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.

Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα

Αλγεβρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ενώ **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Πρόταση

Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι μικρότερη ή ίση προς την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Τριγωνικός πίνακας

Πρόταση

Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$, *και βάση* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *του* V. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας* A *της* L *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$ *είναι άνω τριγωνικός*
2. $L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ *για* $j = 1, \ldots, n$.
3. *Για κάθε* $j = 1, \ldots, n$ *ο υπόχωρος* $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ *είναι αναλλοίωτος από τον* L.

Τριγωνικός πίνακας (2)

Πρόταση

Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \to V$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα ως προς κάποια πεπερασμένη βάση του διανυσματικού χώρου V. Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του πίνακα.

Θεώρημα

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.

Θεώρημα Caley – Hamilton

Θεώρημα (Cayley – Hamilton)

Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή* L*, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης* V*, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής.

Πόρισμα

Εάν A *είναι τετραγωνικός* $n \times n$ *πίνακας και* $\chi_A(x) = \det(A - x\mathbf{I}_n)$ *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A*, τότε ο πίνακας* $\chi_A(A)$ *είναι ο μηδενικός* $n \times n$ *πίνακας.*