Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 17
Διανυσματικοί Χώροι με Νόρμα.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

12/5/2014

Νόρμα

Ορισμός. V διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$.
Μια απεικόνιση $V \to \mathbb{R} : v \mapsto ||v||$ ονομάζεται **νόρμα** (ή **στάθμη**) εάν

N 1. $||v|| = 0$ εάν και μόνον εάν $v = 0$

N 2. Για κάθε $v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, $||av|| = |a| \, ||v||$

N 3. Για κάθε $v, w \in V$, $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (τριγωνική ανισότητα)

Ιδιότητες νόρμας

Λήμμα

Σε ένα διανυσματικό χώρο V με νόρμα,

1. *Για κάθε $v \in V$, $||v|| \geq 0$.*
2. *Για κάθε $v, w \in V$, $||v - w|| \geq |\, ||v|| - ||w||\, |$*

Διανυσματικοί χώροι με νόρμα: παραδείγματα

Παράδειγμα Στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{C}^n$ η ευκλείδεια νόρμα (ή ℓ_2-νόρμα) είναι η συνήθης νόρμα

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

και

$$||z|| = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n}\,.$$

Διανυσματικοί χώροι με νόρμα: παραδείγματα (2)

Παράδειγμα Η ℓ_1-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \,.$$

Παράδειγμα Η ℓ_∞-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_\infty = \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\} \,.$$

Διανυσματικοί χώροι με νόρμα: παραδείγματα (3)

Παράδειγμα Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$, με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ορίζουμε τη νόρμα

$$||p(x)|| = \left(\int_0^1 |p(t)|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Παράδειγμα Στο χώρο $C[a, b]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) ορίζουμε την ℓ_2-νόρμα

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

και την ℓ_∞-νόρμα

$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a, b]\} .$$