Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 20

Ερμιτιανοί και Ορθομοναδιαίοι Τελεστές.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

16/5/2014

Ερμιτιανοί τελεστές

Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ ή το σώμα $\mathbb{R}$.

Ορισμός. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν για κάθε $u, v \in V$,

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle .$$

Ένας ερμιτιανός τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **συμμετρικός**.

Συζυγής πίνακας

Ορισμός. Θεωρούμε έναν τετραγωνικό μιγαδικό πίνακα $A = [a_{ij}]$. Ο **συζυγής** (ή **αναστροφοσυζυγής**) του πίνακα A είναι ο πίνακας $A^* = [b_{ij}]$, όπου

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji} \,.$$

Δηλαδή οι όροι του πίνακα A^* είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των όρων του ανάστροφου του A. Εάν ο πίνακας A είναι πραγματικός, τότε $A^* = A^T$.

Ορισμός. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν είναι ίσος με τον συζυγή του, $A^* = A$.
Ένας ερμιτιανός πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί είναι **συμμετρικός**.

Ερμιτιανοί πίνακες

Λήμμα

Θεωρούμε ερμιτιανό τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ερμιτιανός,

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,.$$

Πρόταση

Εάν ο τελεστής $L : V \to V$ είναι ερμιτιανός, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ορθομοναδιαίοι τελεστές

Ορισμός. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L: V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** εάν για κάθε $u, v \in V$,

$$\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Ένας ορθομοναδιαίος τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Ορισμός. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** εάν $A^*A = \mathbf{I}_n$.
Ένας ορθομοναδιαίος πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Ορθομοναδιαίοι πίνακες

Λήμμα

Θεωρούμε ορθομοναδιαίο τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης n, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθομοναδιαίος,

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \, .$$

Πρόταση

Εάν ο τελεστής $L : V \to V$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου 1.