Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 21
Διαγωνιοποίηση Ερμιτιανών Τελεστών.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

21/5/2014

Λήμμα Schur.

Λήμμα

Εάν $L : V \to V$ είναι ερμιτιανός τελεστής, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Λήμμα (Λήμμα Schur.)

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο πάνω απ το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.

Λήμμα Schur (2)

Πόρισμα

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ_L του τελεστή $L: V \to V$ αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού πάνω από το $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.

Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα)

Κάθε ερμιτιανός τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μία βάση από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας του τελεστή ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος, με τις (πραγματικές) ιδιοτιμές στη διαγώνιο.

Ερμιτιανοί πίνακες

Πρόταση

Για κάθε ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ *υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας* U *τέτοιος ώστε* $\Lambda = U^{-1}AU$ *είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*
Για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ *υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* Q *τέτοιος ώστε* $\Lambda = Q^{-1}AQ$ *είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*

Φασματική Ανάλυση

Θεώρημα (Θεώρημα Φασματικής Ανάλυσης.)

Κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ *με* k *διαφορετικές ιδιοτιμές εκφράζεται ως άθροισμα*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \,,$$

όπου λ_i, *για* $i = 1, \ldots, k$, *είναι οι ιδιοτιμές και* P_i *είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής* λ_i.

Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες

Θεώρημα

Ένας τελεστής $L : V \to V$ σε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$ έχει μία βάση από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα εάν και μόνον εάν

$$L \circ L^* = L^* \circ L\,.$$